МГУ - ШКОЛЕ

М.К. Потапов А.В. Шевкин

Дидактические материалы

9 класс

3-е издание

Москва
«Просвещение»
2010

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
П64

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Потапов М. К.
П64 Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс / М. К. Потапов, А.В. Шевкин. — 3-е изд. — М. : Просвещение, 2010. — 127 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-024345-2.

Пособие содержит задания для подготовки к самостоятельным работам по основным темам учебника «Алгебра, 9» С. М. Никольского и др., а также самостоятельные и контрольные работы в четырех вариантах и итоговый тест в двух вариантах.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-024345-2

Предисловие

Дидактические материалы по курсу алгебры содержат 32 самостоятельные и 6 контрольных работ в четырех вариантах, а также итоговый тест для самоконтроля в двух вариантах. Ко всем вариантам контрольных работ и тесту имеются ответы.

Дидактические материалы полностью соответствуют учебнику «Алгебра, 9» (авторы: С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин) серии «МГУ – школе» и дополняют его более сложными заданиями, необходимыми для работы в классах, нацеленных на подготовку к обучению на повышенном уровне. Дидактические материалы можно использовать в классе и дома при работе по любым учебникам, а также для восполнения пробелов в знаниях и самообразования.

К каждой самостоятельной работе в первой части книги даны примеры выполнения заданий, аналогичных заданиям, включенным в работу. При этом примеры не повторяют задания самостоятельной работы, но разбор их решения существенно повысит результативность выполнения самостоятельных и контрольных работ и усвоение темы в целом.

Материалы для подготовки к самостоятельным работам содержат подробные объяснения решений заданий, так как имеют целью объяснение выбранных способов действий. А оформление решений учащимися может быть кратким. Исключение составляет работа 22, в которой вычисления с помощью теоремы Пифагора опущены.

Темы, отмеченные в дидактических материалах звездочкой, не являются обязательными для изучения в общеобразовательных классах, или содежат более сложные задания. Они охватывают программу углубленного изучения математики (предпрофильных классов).

Любые из самостоятельных работ учитель может использовать для контроля на отметку. Но при этом следует учесть, что многие самостоятельные работы и все контрольные работы избыточны по объему, предполагается, что учитель самостоятельно отберет из них часть заданий с учетом уровня подготовки учащихся по предмету и времени, отводимого на выполнение работы.

Некоторые задания вариантов III и IV несколько сложнее соответствующих заданий вариантов I и II. В классах с углубленным изучением математики отдельные самостоятельные работы, отмеченные звездочками, можно провести как контрольные.

РАЗДЕЛ I

Материалы для подготовки к самостоятельным работам

1. Линейные неравенства с одним неизвестным

Пример 1. Решим неравенство:

а) $-2x + 1 < 3x + 6$; б) $7(x + 3) < 5x - 11$;
в) $2(x - 4) > 2x + 3$; г) $5(4x - 1) > 2(10x - 3)$.

Решение. а) Перенеся $3x$ в левую, а 1 в правую часть неравенства (с противоположными знаками), получим неравенство

$$-5x < 5, \tag{1}$$

равносильное исходному неравенству.

Разделив неравенство (1) на -5 и поменяв знак неравенства на противоположный, получим неравенство $x > -1$, равносильное исходному неравенству. Поэтому множество решений исходного неравенства образует интервал $(-1; +\infty)$ (рис. 1).

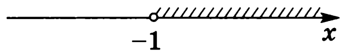

Рис. 1

б) Раскрыв скобки и перенеся $5x$ в левую, а 21 в правую часть неравенства (с противоположными знаками), получим неравенство

$$2x < -32, \tag{2}$$

равносильное исходному неравенству.

Разделив неравенство (2) на 2, получим неравенство

$$x < -16,$$

равносильное исходному неравенству. Поэтому множество решений исходного неравенства образует интервал $(-\infty; -16)$ (рис. 2).

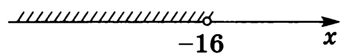

Рис. 2

Замечание. Далее вместо слов «получим неравенство, равносильное неравенству» часто будем писать «перепишем неравенство в виде».

в) Раскрыв скобки и перенеся слагаемые, содержащие x, в одну часть неравенства, а остальные в другую, приведя подобные слагаемые, перепишем неравенство в виде

$$0x > 11. \tag{3}$$

Неравенство (3) не имеет решений, так как при любом значении x получается неверное числовое неравенство $0 > 11$. Поэтому и равносильное ему исходное неравенство не имеет решений.

г) Раскрыв скобки и перенеся слагаемые, содержащие x, в одну часть неравенства, а остальные в другую, приведя подобные слагаемые, перепишем неравенство в виде

$$0x > -1. \tag{4}$$

Решением неравенства (4) является любое действительное число, так как при любом значении x получается верное числовое неравенство $0 > -1$. Поэтому решением равносильного ему исходного неравенства является любое число.

Ответ. а) $(-1; +\infty)$; б) $(-\infty; -16)$; в) нет решений; г) $(-\infty; +\infty)$.

Пример 2. Решим неравенство:

а) $\frac{7x-3}{5} - \frac{5x-2}{4} < \frac{-x+12}{20}$ и укажем его наибольшее целое решение;

б) $(\sqrt{5} - 2)x > 9 - 4\sqrt{5}$ и укажем его наименьшее целое решение.

Решение. а) Умножив исходное неравенство на 20, получим неравенство

$$4(7x - 3) - 5(5x - 2) < -x + 12, \tag{5}$$

равносильное исходному неравенству.

Раскрыв скобки и перенеся слагаемые, содержащие x, в одну часть неравенства, а остальные в другую, приведя подобные члены, перепишем неравенство (5) в виде

$$4x < 14 \text{ или в виде } x < 3{,}5.$$

Множество решений последнего неравенства, а значит, и равносильного ему исходного неравенства образует интервал $(-\infty; 3{,}5)$ (рис. 3). Так как $3 < 3{,}5 < 4$, то 3 — наибольшее целое решение исходного неравенства.

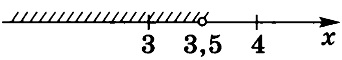

Рис. 3

б) Так как $\sqrt{5} - 2 > 0$, а $9 - 4\sqrt{5} = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = (\sqrt{5} - 2)^2$, то, разделив исходное неравенство на положительное число $\sqrt{5} - 2$, получим неравенство

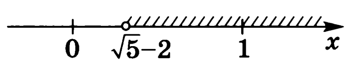

Рис. 4

$$x > \sqrt{5} - 2,$$

равносильное исходному. Поэтому множество решений исходного неравенства образует интервал $(\sqrt{5} - 2; +\infty)$ (рис. 4). Так как $0 < \sqrt{5} - 2 < 1$, то 1 — наименьшее целое решение исходного неравенства.

Ответ. а) $(-\infty;\ 3{,}5)$, 3 — наибольшее целое решение неравенства; б) $(\sqrt{5} - 2;\ +\infty)$, 1 — наименьшее целое решение неравенства.

Пример 3. Найдем наибольшее целое значение x, при котором разность дробей $\frac{13 - x}{7}$ и $\frac{2 - x}{4}$ отрицательна.

Решение. Требуется найти наибольшее целое число, являющееся решением неравенства

$$\frac{13 - x}{7} - \frac{2 - x}{4} < 0. \qquad (6)$$

Умножив неравенство (6) на 28, получим неравенство

$$4(13 - x) - 7(2 - x) < 0, \qquad (7)$$

равносильное исходному неравенству.

Раскрыв скобки, приведя подобные члены и перенеся слагаемые, содержащие x, в одну часть неравенства, а остальные в другую, перепишем неравенство (7) в виде

$$3x < -38$$

или в виде

$$x < -12\frac{2}{3}.$$

Так как $-13 < -12\frac{2}{3} < -12$ (рис. 5), то -13 — наибольшее целое решение неравенства (6).

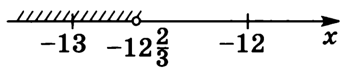

Рис. 5

Ответ. -13.

2*. Линейные неравенства с параметром

Пример 1. При каком значении параметра a неравенство $ax > 3x + 10$ не имеет решений?

Решение. Перепишем исходное неравенство в виде

$$(a - 3)x > 10. \qquad (1)$$

Если $a - 3 = 0$, т. е. $a = 3$, то неравенство (1) имеет вид

$$0x > 10. \qquad (2)$$

Неравенство (2) не имеет решений, так как при любом значении x получается неверное числовое неравенство $0 > 10$.

Если $a > 3$, то, разделив неравенство (1) на положительное число $a - 3$, перепишем его в виде $x > \frac{10}{a - 3}$. Это означает, что для каждого $a > 3$ исходное неравенство имеет хотя бы одно решение, например $x = \frac{10}{a - 3} + 1$.

Если $a < 3$, то, разделив неравенство (1) на отрицательное число $a - 3$, перепишем его в виде $x < \frac{10}{a-3}$. Это означает, что для каждого $a < 3$ исходное неравенство имеет хотя бы одно решение, например $x = \frac{10}{a-3} - 1$.

Итак, исходное неравенство не имеет решений лишь при $a = 3$.

Ответ. При $a = 3$.

Пример 2. При каком значении параметра a любое действительное число является решением неравенства $ax > 5x - 7$?

Решение. Перепишем исходное неравенство в виде

$$(a - 5)x > -7. \tag{3}$$

Если $a - 5 = 0$, т. е. $a = 5$, то неравенство (3) имеет вид

$$0x > -7. \tag{4}$$

Решением неравенства (4) является любое действительное число, так как при любом значении x получается верное числовое неравенство $0 > -7$.

Если $a - 5 > 0$, то неравенство (3) равносильно неравенству $x > \frac{-7}{a-5}$, поэтому для каждого значения $a > 5$ найдется значение x, которое не является решением исходного неравенства, например $x = \frac{-7}{a-5} - 1$.

Если $a - 5 < 0$, то неравенство (3) равносильно неравенству $x < \frac{-7}{a-5}$, поэтому для каждого значения $a < 5$ найдется значение x, которое не является решением исходного неравенства, например $x = \frac{-7}{a-5} + 1$.

Итак, любое действительное число является решением исходного неравенства лишь при $a = 5$.

Ответ. При $a = 5$.

Пример 3. При каждом значении параметра a решим неравенство $ax - 2a < -6 - x$.

Решение. Перепишем исходное неравенство в виде

$$(a + 1)x < 2a - 6. \tag{5}$$

Если $a + 1 = 0$, т. е. $a = -1$, то неравенство (5) имеет вид

$$0x < -8. \tag{6}$$

Неравенство (6) не имеет решений. Значит, и равносильное ему неравенство (5) не имеет решений.

Если $a + 1 > 0$, т. е. $a > -1$, то неравенство (5) равносильно неравенству $x < \frac{2a-6}{a+1}$ и имеет решения: любое $x \in \left(-\infty; \frac{2a-6}{a+1}\right)$.

Если $a + 1 < 0$, т. е. $a < -1$, то неравенство (5) равносильно неравенству $x > \frac{2a-6}{a+1}$ и имеет решения: любое $x \in \left(\frac{2a-6}{a+1}; +\infty\right)$.

Ответ. Нет решений для $a = -1$; любое $x \in \left(-\infty; \frac{2a-6}{a+1}\right)$ для каждого $a > -1$; любое $x \in \left(\frac{2a-6}{a+1}; +\infty\right)$ для каждого $a < -1$.

3. Системы линейных неравенств с одним неизвестным

Пример 1. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 < 13, \\ 3x + 4 > 11. \end{cases}$$

Решение. Решениями первого неравенства системы являются все $x < 7$ (рис. 6, *а*), а решениями второго неравенства системы являются все $x > \frac{7}{3}$ (рис. 6, *б*), поэтому решениями системы являются все x, такие, что $\frac{7}{3} < x < 7$ (рис. 6, *в*).

Ответ. $\left(\frac{7}{3}; 7\right)$.

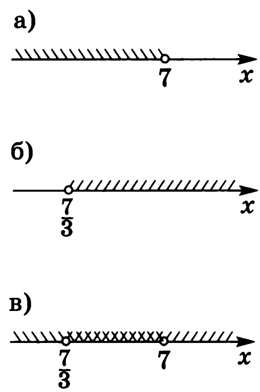

Рис. 6

Пример 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 5x - 7 > 4x + 1, \\ 4x - 1 > 2x + 7. \end{cases}$$

Решение. Решениями первого неравенства системы являются все $x > 8$ (рис. 7, *а*), а решениями второго неравенства системы являются все $x > 4$ (рис. 7, *б*), поэтому решениями системы являются все $x > 8$ (рис. 7, *в*).

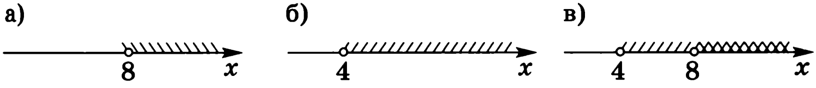

Рис. 7

Ответ. $(8; +\infty)$.

Пример 3. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{7x-4}{2} < x+3, \\ 2x+1 < \dfrac{8x-7}{3}. \end{cases} \quad (1)$$

Решение. Умножив первое неравенство системы на 2, а второе неравенство на 3, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 7x - 4 < 2x + 6, \\ 6x + 3 < 8x - 7. \end{cases} \quad (2)$$

Решениями первого неравенства системы (2) являются все $x < 2$, а решениями второго неравенства системы (2) являются все $x > 5$, поэтому система (2), а значит, и равносильная ей система (1) не имеют решений (рис. 8).

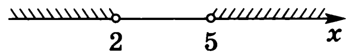

Рис. 8

Ответ. Нет решений.

4*. Системы линейных неравенств с параметром

Пример 1. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} 3x - 2a > 5, \\ 2x + 3a < 7 \end{cases} \quad (1)$$

а) совместна; б) несовместна?

Решение. При каждом значении параметра первое неравенство системы (1) имеет решения: все $x > \dfrac{2a+5}{3}$ (рис. 9), а второе неравенство системы (1) имеет решения: все $x < \dfrac{7-3a}{2}$ (рис. 10).

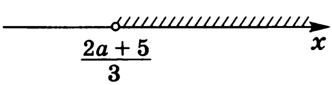

Рис. 9

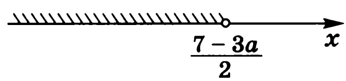

Рис. 10

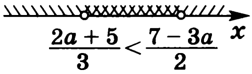

Рис. 11

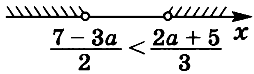

Рис. 12

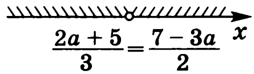

Рис. 13

а) Неравенства системы (1) имеют общие решения, если $\frac{2a+5}{3} < \frac{7-3a}{2}$ (рис. 11), т. е. $a < \frac{11}{13}$. Итак, система совместна, если $a < \frac{11}{13}$.

б) Неравенства системы (1) не имеют общих решений, если либо $\frac{2a+5}{3} > \frac{7-3a}{2}$ (рис. 12), т. е. $a > \frac{11}{13}$, либо $\frac{2a+5}{3} = \frac{7-3a}{2}$ (рис. 13), т. е. $a = \frac{11}{13}$. Итак, система несовместна, если $a \geqslant \frac{11}{13}$.

Ответ. а) При $a < \frac{11}{13}$; б) при $a \geqslant \frac{11}{13}$.

Пример 2. При каких значениях параметра a число 1 является решением системы неравенств

$$\begin{cases} 2 < 6x - a, \\ -3 > 4x - 5a? \end{cases} \qquad (2)$$

Решение. При каждом значении параметра a первое неравенство системы (2) имеет решения: все $x > \frac{2+a}{6}$ (рис. 14), а второе неравенство системы (2) имеет решения: все $x < \frac{5a-3}{4}$ (рис. 15).

Число 1 является решением системы лишь при условии $\frac{2+a}{6} < 1 < \frac{5a-3}{4}$ (рис. 16), т. е. лишь для тех значений параметра a, которые являются решением системы

$$\begin{cases} \dfrac{5a-3}{4} > 1, \\ \dfrac{2+a}{6} < 1. \end{cases} \qquad (3)$$

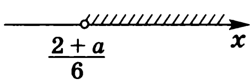

Рис. 14

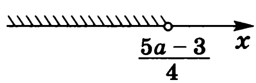

Рис. 15

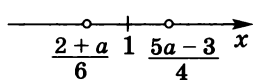

Рис. 16

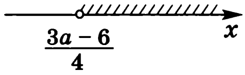

Рис. 17

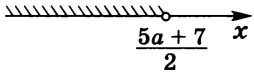

Рис. 18

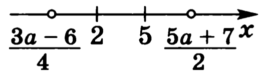

Рис. 19

Решив систему (3), получим множество ее решений: все $a \in (1{,}4;\ 4)$.

Итак, число 1 является решением системы (2) только при каждом $a \in (1{,}4;\ 4)$.

Ответ. При каждом $a \in (1{,}4;\ 4)$.

Пример 3. При каких значениях параметра a числа 2 и 5 являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} 3a - 4x < 6, \\ 2x - 5a < 7? \end{cases} \tag{4}$$

Решение. При каждом значении параметра a первое неравенство системы (4) имеет решения: все $x > \frac{3a-6}{4}$ (рис. 17), а второе неравенство системы (4) имеет решения: все $x < \frac{5a+7}{2}$ (рис. 18).

Числа 2 и 5 являются решениями системы (4) только для тех значений параметра a, для которых справедливы неравенства $\frac{3a-6}{4} < 2 < 5 < \frac{5a+7}{2}$ (рис. 19), т. е. искомые значения параметра являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3a-6}{4} < 2, \\ \dfrac{5a+7}{2} > 5. \end{cases} \tag{5}$$

Решив систему неравенств (5), получим множество всех искомых значений параметра: $a \in \left(\frac{3}{5};\ \frac{14}{3}\right)$.

Ответ. При каждом $a \in \left(\frac{3}{5};\ \frac{14}{3}\right)$.

Замечание. Некоторые задачи с параметром можно решить, используя графики функций. Например, при решении задания 3 систему (4) можно переписать в виде

$$\begin{cases} x > \dfrac{3a-6}{4}, \\ x < \dfrac{5a+7}{2}. \end{cases} \tag{6}$$

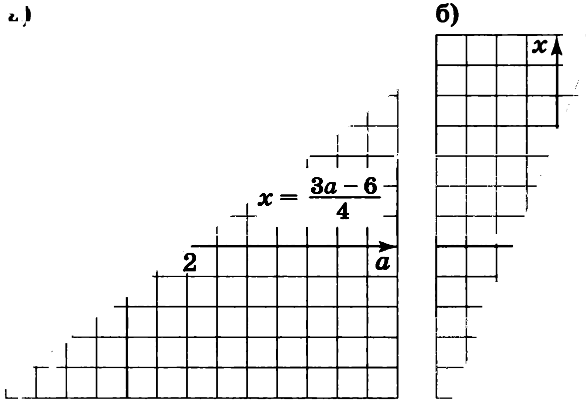

Рис. 20

Первое из неравенств системы (6) задает в системе координат aOx полуплоскость без границы $x = \frac{3a-6}{4}$, закрашенную на рисунке 20, *а*, а второе неравенство задает полуплоскость без границы $x = \frac{5a+7}{2}$, закрашенную на рисунке 20, *б*.

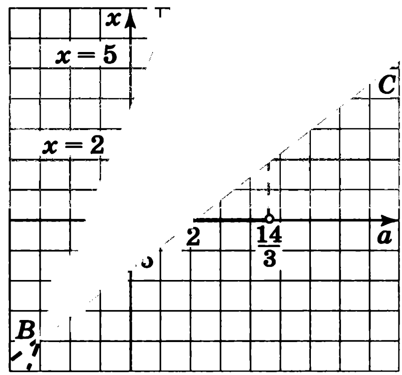

Рис. 21

Обоим неравенствам системы (6) соответствуют точки угла ABC (без лучей BA и BC) (рис. 21). Из них ординату $x=5$ имеют точки, абсциссы которых удовлетворяют двойному неравенству $\frac{3}{5} < a < \frac{26}{3}$, а ординату $x = 2$ имеют точки, абсциссы которых удовлетворяют двойному неравенству $-\frac{3}{5} < a < \frac{14}{3}$ (координаты точек пересечения прямых найдены при решении уравнений $\frac{3a-6}{4} = 2$, $\frac{3a-6}{4} = 5$, $\frac{5a+7}{2} = 5$ и $\frac{5a+7}{2} = 2$).

Поэтому числа 2 и 5 являются решениями системы неравенств (4) только при каждом $a \in \left(\frac{3}{5}; \frac{14}{3}\right)$.

5. Неравенства второй степени

Пример 1. Решим неравенство:

а) $x^2 - 5x + 4 > 0$; б) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3 < 0$.

Решение. а) Квадратный трехчлен $x^2 - 5x + 4$ имеет дискриминант $D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 9$. Так как $D > 0$, то этот квадратный трехчлен имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Исходное неравенство можно переписать в виде

$$(x - 1)(x - 4) > 0.$$

Отметим числа 1 и 4 на координатной оси и определим знак произведения $(x - 1)(x - 4)$ на каждом из интервалов $(4; +\infty)$, $(1; 4)$ и $(-\infty; 1)$ (рис. 22). Все решения исходного неравенства составляют два промежутка: $(-\infty; 1)$ и $(4; +\infty)$.

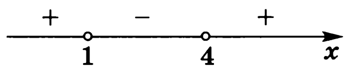

Рис. 22

б) Умножив исходное неравенство на 2, перепишем его в виде

$$x^2 - 5x - 6 < 0. \quad (1)$$

Квадратный трехчлен $x^2 - 5x - 6$ имеет дискриминант $D = (-5)^2 + 4 \cdot 6 = 49$. Так как $D > 0$, то этот квадратный трехчлен имеет два корня: $x_1 = -1$ и $x_2 = 6$, т. е. график квадратичной функции $y = x^2 - 5x - 6$ пересекает ось Ox в точках -1 и 6. Так как ветви параболы $y = x^2 - 5x - 6$ направлены вверх, то эта функция принимает отрицательные значения только на интервале $(-1; 6)$ (рис. 23). Поэтому все решения исходного неравенства составляют промежуток $(-1; 6)$.

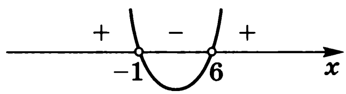

Рис. 23

Ответ. а) $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$; б) $(-1; 6)$.

Пример 2. Решим неравенство:

а) $x^2 - 4x + 4 > 0$; б) $3x^2 + 18x + 27 < 0$.

Решение. а) Квадратный трехчлен $x^2 - 4x + 4$ имеет дискриминант $D = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0$. Так как $D = 0$, то этот квадратный трехчлен имеет единственный корень $x = 2$, поэтому исходное неравенство можно переписать в виде $(x - 2)^2 > 0$.

Так как $(x - 2)^2 = 0$ при $x = 2$ и $(x - 2)^2 > 0$ при каждом $x \neq 2$, то все решения исходного неравенства составляют два промежутка: $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$.

б) Разделив исходное неравенство на 3, перепишем его в виде

$$x^2 + 6x + 9 < 0. \quad (2)$$

Квадратный трехчлен $x^2 + 6x + 9$ имеет дискриминант $D = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$. Так как $D = 0$, то этот квадратный трехчлен имеет единственный корень $x = -3$, т. е. график квадратичной функции $y = x^2 + 6x + 9$ имеет с осью Ox единственную общую точку $(-3; 0)$. Так как ветви параболы направлены вверх, то эта функция не принимает отрицательных значений ни при каких значениях x (рис. 24). Поэтому исходное неравенство не имеет решений.

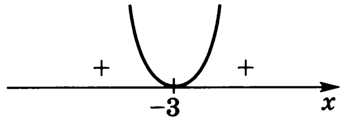

Рис. 24

Ответ. а) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; б) нет решений.

Пример 3. Решим неравенство:

а) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} > 0$; б) $-5x^2 + 6x - 3 > 0$.

Решение. а) Умножив исходное неравенство на 3, перепишем его в виде

$$3x^2 - 4x + 2 > 0. \qquad (3)$$

Квадратный трехчлен $3x^2 - 4x + 2$ имеет дискриминант $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -8$. Так как $D < 0$, то этот квадратный трехчлен не имеет корней. Выделив полный квадрат в квадратном трехчлене, неравенство (3) можно переписать в виде $3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0$, откуда видно, что каждое число $x \in \boldsymbol{R}$ является решением неравенства (3), а значит, и исходного неравенства.

б) Умножив исходное неравенство на -1, перепишем его в виде

$$5x^2 - 6x + 3 < 0. \qquad (4)$$

Квадратный трехчлен $5x^2 - 6x + 3$ имеет дискриминант $D = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = -24$. Так как $D < 0$, то этот квадратный трехчлен не имеет корней, т. е. график квадратичной функции $y = 5x^2 - 6x + 3$ не пересекает ось Ox. Так как ветви параболы $y = 5x^2 - 6x + 3$ направлены вверх, то эта функция не принимает отрицательных значений ни при каких значениях x (рис. 25). Следовательно, неравенство (4), а значит, и исходное неравенство не имеют решений.

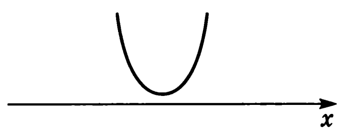

Рис. 25

Ответ. а) $x \in \boldsymbol{R}$; б) нет решений.

6*. Неравенства второй степени с параметром

Пример 1. Для каждого значения параметра a решим неравенство

$$x^2 - (3 + 2a)x + 6a > 0. \qquad (1)$$

Решение. Для каждого значения параметра a корни квадратного трехчлена $x^2 - (3 + 2a)x + 6a$ найдем по формулам Виета: $x_1 = 2a$, $x_2 = 3$.

1) Если $2a = 3$, т. е. $a = 1{,}5$, то квадратный трехчлен имеет единственный корень $x = 3$ и неравенство (1) можно переписать в виде $(x - 3)^2 > 0$. Поэтому неравенство (1) имеет решения: все $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ (рис. 26, *а*).

2) Если $2a > 3$, т. е. $a > 1{,}5$, то неравенство (1) имеет решения: все $x \in (-\infty; 3) \cup (2a; +\infty)$ (рис. 26, *б*).

3) Если $2a < 3$, т. е. $a < 1{,}5$, то неравенство (1) имеет решения: все $x \in (-\infty; 2a) \cup (3; +\infty)$ (рис. 26, *в*).

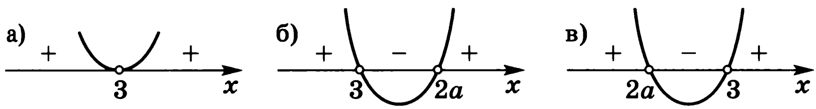

Рис. 26

Ответ. $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ при $a = 1{,}5$; $(-\infty; 3) \cup (2a; +\infty)$ при каждом значении $a > 1{,}5$; $(-\infty; 2a) \cup (3; +\infty)$ при каждом значении $a < 1{,}5$.

Пример 2. Для каждого значения параметра a решим неравенство

$$x^2 + (3a - 3)x + 2a^2 - 5a + 2 < 0. \qquad (2)$$

Решение. Для каждого значения параметра a квадратный трехчлен $x^2 + (3a - 3)x + 2a^2 - 5a + 2$ имеет дискриминант $D = 9a^2 - 18a + 9 - 8a^2 + 20a - 8 = (a + 1)^2$, а его корни равны $x_1 = 2 - a$, $x_2 = 1 - 2a$.

1) Если $2 - a = 1 - 2a$, т. е. $a = -1$, то неравенство (2) можно переписать в виде $(x - 3)^2 < 0$, поэтому неравенство (2) не имеет решений (рис. 27, *а*).

2) Если $2 - a < 1 - 2a$, т. е. $a < -1$, то неравенство (2) имеет решения: все $x \in (2 - a; 1 - 2a)$ (рис. 27, *б*).

3) Если $2 - a > 1 - 2a$, т. е. $a > -1$, то неравенство (2) имеет решения: все $x \in (1 - 2a; 2 - a)$ (рис. 27, *в*).

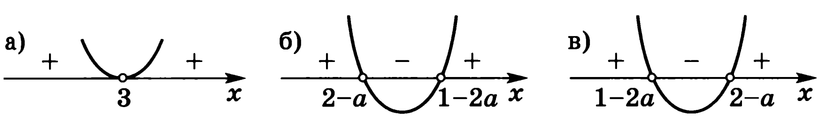

Рис. 27

Ответ. Нет решений при $a = -1$; $(2 - a;\ 1 - 2a)$ при каждом значении $a < -1$; $(1 - 2a;\ 2 - a)$ при каждом значении $a > -1$.

Пример 3. Найдем все значения параметра m, при каждом из которых любое число является решением неравенства

$$x^2 + mx + 9 > 0.$$

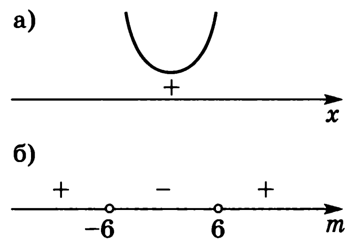

Рис. 28

Решение. При каждом значении параметра m ветви параболы $y = x^2 + mx + 9$ направлены вверх. Поэтому любое число является решением неравенства $x^2 + mx + 9 > 0$ только в том случае, если эта парабола не имеет общих точек с осью Ox (рис. 28, *а*), т. е. если квадратный трехчлен $x^2 + mx + 9$ не имеет корней, а это возможно лишь тогда, когда дискриминант трехчлена меньше нуля: $D = m^2 - 36 < 0$.

Неравенство $m^2 - 36 < 0$ перепишем в виде

$$(m - 6)(m + 6) < 0. \qquad (3)$$

Отметим числа -6 и 6 на координатной оси и определим знак произведения $(m - 6)(m + 6)$ на каждом из интервалов $(6;\ +\infty)$, $(-\infty;\ -6)$ и $(-6;\ 6)$ (рис. 28, *б*).

Все решения неравенства (3) составляют промежуток $(-6;\ 6)$. Следовательно, только при каждом значении $m \in (-6;\ 6)$ любое число является решением исходного неравенства.

Ответ. При каждом значении $m \in (-6;\ 6)$.

Пример 4. Найдем все значения параметра a, для каждого из которых множество решений неравенства

$$x^2 - (5a + 3)x + 4a^2 + 12a < 0 \qquad (4)$$

содержит отрезок [1; 2].

Решение. Для каждого значения параметра a квадратный трехчлен $x^2 - (5a + 3)x + 4a^2 + 12a$ имеет дискриминант $D = (5a + 3)^2 - 16a^2 - 48a = 9(a - 1)^2$.

При $a=1$ этот квадратный трехчлен имеет единственный корень и неравенство (4) можно записать в виде $(x - 4)^2 < 0$, откуда следует, что неравенство (4) не имеет решений, а значит, множество решений неравенства (4) — пустое множество — не может содержать отрезок [1; 2].

При каждом $a > 1$ квадратный трехчлен $x^2 - (5a + 3)x + {}$ $+ 4a^2 + 12a$ имеет два различных корня: $x_1 = 4a$, $x_2 = a + 3$, причем $x_1 > x_2$.

Следовательно, множество решений неравенства (4) составляет интервал $(x_2;\ x_1)$, который не может содержать отрезок [1; 2], так как $x_2 > 4$ (рис. 29).

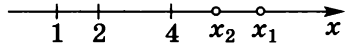

Рис. 29

При каждом $a < 1$ квадратный трехчлен $x^2 - (5a + 3)x + 4a^2 + 12a$ также имеет два различных корня: $x_1 = 4a$, $x_2 = a + 3$, причем $x_2 > x_1$. Следовательно, множество решений неравенства (4) составляет интервал $(4a;\ a + 3)$, который содержит отрезок [1; 2], только если выполняются неравенства $4a < 1$ и $2 < a + 3$ (рис. 30). Эти неравенства выполнены только для $a \in \left(-1;\ \frac{1}{4}\right)$.

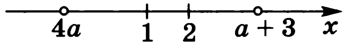

Рис. 30

Следовательно, условиям задачи удовлетворяют только значения $a \in \left(-1;\ \frac{1}{4}\right)$.

Ответ. Для каждого $a \in \left(-1;\ \frac{1}{4}\right)$.

7. Рациональные неравенства

Пример 1. Решим неравенство:

а) $(x - 2)(2x + 4)(x - 3) > 0$; б) $\frac{2x-1}{x-2} > 0$.

Решение. а) Перепишем исходное неравенство в виде

$$2(x - (-2))(x - 2)(x - 3) > 0. \qquad (1)$$

Применяя метод интервалов, т. е. выясняя знак левой части неравенства на каждом из интервалов (рис. 31), находим множество решений неравенства (1), а значит, и исходного неравенства: $(-2;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$.

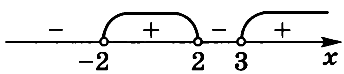

Рис. 31

б) Перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{2(x-0,5)}{x-2} > 0. \qquad (2)$$

Применяя метод интервалов (рис. 32), находим множество решений неравенства (2), а значит, и исходного неравенства: $(-\infty;\ 0,5) \cup (2;\ +\infty)$.

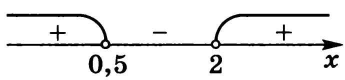

Рис. 32

Ответ. а) $(-2;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 0,5) \cup (2;\ +\infty)$.

Пример 2. Решим неравенство:

а) $\frac{-5}{3x+2} > 0$;   б) $\frac{x^2+6x+10}{2x-3} < 0$.

Решение. а) Так как числитель дроби $\frac{-5}{3x+2}$ — отрицательное число, то исходное неравенство равносильно неравенству

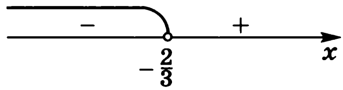

Рис. 33

$$3x + 2 < 0. \qquad (3)$$

Неравенство (3), а значит, и равносильное ему исходное неравенство имеют множество решений: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ (рис. 33).

б) Перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{(x+3)^2+1}{2x-3} < 0. \qquad (4)$$

Так как $(x + 3)^2 + 1 > 0$ для каждого $x \in \boldsymbol{R}$, то неравенство (4) равносильно неравенству

$$2x - 3 < 0. \qquad (5)$$

Неравенство (5), а значит, и равносильное ему исходное неравенство имеют множество решений: $(-\infty; 1{,}5)$ (рис. 34).

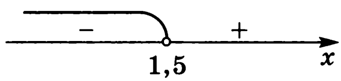

Рис. 34

Ответ. а) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$; б) $(-\infty; 1{,}5)$.

Пример 3. Решим неравенство:

а) $\frac{x-1}{x-2} > \frac{x-2}{x-1}$;   б) $(x-1)(x^2-4x+5) > (x-1)(x^2+2x-1)$.

Решение. а) Перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{(x-1)^2-(x-2)^2}{(x-1)(x-2)} > 0$$

или в виде

$$\frac{2(x-1{,}5)}{(x-1)(x-2)} > 0. \qquad (6)$$

Применяя метод интервалов (рис. 35), находим множество решений неравенства (6), а значит, и исходного неравенства: $(1; 1{,}5) \cup (2; +\infty)$.

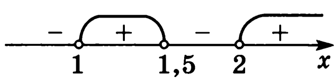

Рис. 35

б) Перепишем исходное неравенство в виде

$$(x - 1)(x^2 - 4x + 5 - x^2 - 2x + 1) > 0$$

или в виде

$$6(x-1)^2 < 0. \qquad (7)$$

Так как $(x-1)^2 \geqslant 0$ при любом значении x, то неравенство (7), а значит, и равносильное ему исходное неравенство не имеют решений.

Ответ. а) $(1;\ 1{,}5) \cup (2;\ +\infty)$; б) нет решений.

8*. Рациональные неравенства (продолжение)

Пример 1. Решим неравенство:

а) $(x^2-3x+2)(x^2-5x+6) < 0$; б) $\dfrac{x^2-x-6}{x+2} < 0$.

Решение. а) Перепишем исходное неравенство в виде

$$(x-1)(x-2)^2(x-3) < 0. \qquad (1)$$

Применяя метод интервалов (рис. 36), находим множество решений неравенства (1), а значит, и исходного неравенства: $(1;\ 2) \cup (2;\ 3)$.

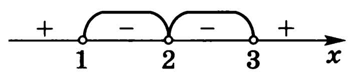

Рис. 36

б) Перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{(x+2)(x-3)}{x+2} < 0. \qquad (2)$$

Применяя метод интервалов (рис. 37), находим множество решений неравенства (2), а значит, и исходного неравенства: $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 3)$.

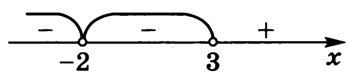

Рис. 37

Ответ. а) $(1;\ 2) \cup (2;\ 3)$; б) $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 3)$.

Пример 2. Решим неравенство:

а) $\dfrac{x^2}{x-1} > \dfrac{-1}{1-x}$; б) $(x^2+x-2)(x^2-4x+3) > 0$.

Решение. а) Перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} > 0. \qquad (3)$$

Применяя метод интервалов (рис. 38), находим множество решений неравенства (3), а значит, и исходного неравенства: $(-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

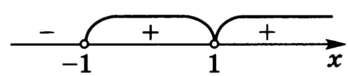

Рис. 38

б) Перепишем исходное неравенство в виде

$$(x+2)(x-1)^2(x-3) > 0. \qquad (4)$$

Применяя метод интервалов (рис. 39), находим множество решений неравенства (4), а значит, и исходного неравенства: $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

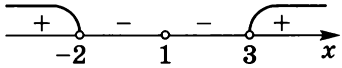

Рис. 39

Ответ. а) $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Пример 3. Решим неравенство:

а) $\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 > \frac{2x^2-8}{x^2-1}$;

б) $(x^2 + 10x + 15)^2 < (x^2 + 5x + 10)^2$.

Решение. а) Перепишем исходное неравенство в виде

$$\left(\frac{x-2}{x+1} - \frac{x+2}{x-1}\right)^2 > 0. \qquad (5)$$

Неравенство (5) можно переписать в виде

$$\frac{36x^2}{(x+1)^2(x-1)^2} > 0. \qquad (6)$$

Неравенство (6) справедливо только для тех значений x, при каждом из которых левая часть неравенства (6) определена и не равна нулю, т. е. для всех x, кроме $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$.

Неравенство (6) можно решить и методом интервалов (рис. 40).

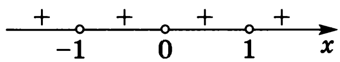

Рис. 40

Итак, неравенство (5), а значит, и исходное неравенство имеют множество решений: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

б) Перепишем исходное неравенство в виде

$$(x^2 + 10x + 15)^2 - (x^2 + 5x + 10)^2 < 0. \qquad (7)$$

Разложив левую часть неравенства на множители с помощью формулы разности квадратов, перепишем неравенство (7) в виде

$$5(x + 1)(2x^2 + 15x + 25) < 0. \qquad (8)$$

Квадратный трехчлен $2x^2 + 15x + 25$ имеет дискриминант $D = 15^2 - 4 \cdot 2 \cdot 25 = 25$, а его корни равны $x_1 = -5$ и $x_2 = -2{,}5$. Поэтому неравенство (8) можно переписать в виде

$$5(x + 5)(x + 2{,}5)(x + 1) < 0. \qquad (9)$$

Применяя метод интервалов (рис. 41), находим множество решений неравенства (9), а значит, и исходного неравенства: $(-\infty; -5) \cup (-2{,}5; -1)$.

Ответ. а) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup$ $\cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -5) \cup$ $\cup (-2{,}5; -1)$.

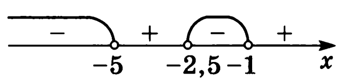

Рис. 41

9*. Системы рациональных неравенств

Пример 1. Решим систему неравенств:

а) $\begin{cases} (x+4)(x-3) > 0, \\ \dfrac{x-4}{x+6} < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+10} < 0, \\ \dfrac{x+6}{x-8} < 0. \end{cases}$

Решение. а) Все решения первого неравенства исходной системы составляют два промежутка: $(-\infty;\ -4)$ и $(3;\ +\infty)$ (рис. 42, *а*).

Все решения второго неравенства исходной системы составляют промежуток $(-6;\ 4)$ (рис. 42, *б*).

Тогда все решения исходной системы неравенств составляют два промежутка: $(-6;\ -4)$ и $(3;\ 4)$ (рис. 42, *в*).

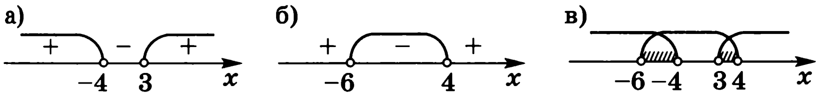

Рис. 42

б) Все решения первого неравенства исходной системы составляют промежуток $(-10;\ 1)$ (рис. 43, *а*).

Все решения второго неравенства исходной системы составляют промежуток $(-6;\ 8)$ (рис. 43, *б*).

Тогда все решения исходной системы неравенств составляют промежуток $(-6;\ 1)$ (рис. 43, *в*).

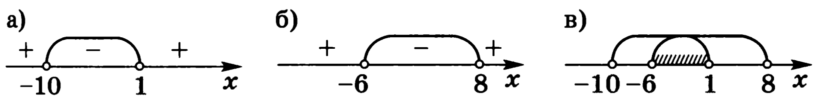

Рис. 43

Ответ. а) $(-6;\ -4) \cup (3;\ 4)$; б) $(-6;\ 1)$.

Пример 2. Решим систему неравенств:

а) $\begin{cases} 4x - 5 < 0, \\ \dfrac{11}{25x^2-9} > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x^2+1} > 0, \\ \dfrac{x-3}{x^2-3x-10} < 0. \end{cases}$

Решение. а) Все решения первого неравенства исходной системы составляют промежуток $\left(-\infty;\ \dfrac{5}{4}\right)$ (рис. 44, *а*).

Второе неравенство системы равносильно неравенству

$$25\left(x+\frac{3}{5}\right)\left(x-\frac{3}{5}\right) > 0,$$

все решения которого составляют два промежутка: $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$ и $\left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$ (рис. 44, *б*).

Тогда все решения исходной системы неравенств составляют два промежутка: $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$ и $\left(\frac{3}{5}; \frac{5}{4}\right)$ (рис. 44, *в*).

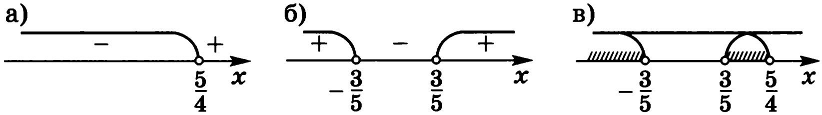

Рис. 44

б) Так как для каждого действительного числа x справедливо неравенство $x^2 + 1 > 0$ и так как $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$, то исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} (x + 4)(x - 4) > 0, \\ \dfrac{x-3}{(x+2)(x-5)} < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Все решения первого неравенства системы (1) составляют два промежутка: $(-\infty; -4)$ и $(4; +\infty)$ (рис. 45, *а*).

Все решения второго неравенства системы (1) составляют два промежутка: $(-\infty; -2)$ и $(3; 5)$ (рис. 45, *б*).

Тогда все решения системы (1), равносильной исходной системе неравенств, составляют два промежутка: $(-\infty; -4)$ и $(4; 5)$ (рис. 45, *в*).

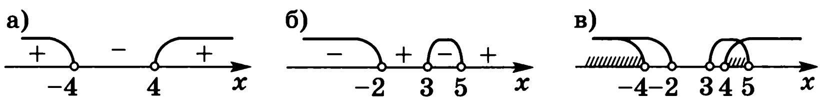

Рис. 45

Ответ. а) $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; \frac{5}{4}\right)$; б) $(-\infty; -4) \cup (4; 5)$.

Пример 3. Решим систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{7}{3x+1} > \dfrac{2}{3x+1}, \\ 13x + 1 < 7x - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2+2007}{x^2-1} > \dfrac{x+2007}{x^2-1}, \\ \dfrac{x+1003}{2x+3} > \dfrac{x-1004}{2x+3}. \end{cases}$

Решение. а) Перенеся все слагаемые в левую часть каждого из неравенств исходной системы, перепишем ее в виде

$$\begin{cases} \dfrac{5}{3x+1} > 0, \\ 6x+2 < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Так как $5 > 0$ и $2 > 0$, то система (2) равносильна системе

$$\begin{cases} 3x+1 > 0, \\ 3x+1 < 0, \end{cases} \qquad (3)$$

которая несовместна, так как ни для какого действительного числа x выражение $3x + 1$ не может быть одновременно и положительным, и отрицательным. Поэтому и исходная система, равносильная системе (3), не имеет решений.

б) Перенеся все слагаемые в левую часть каждого из неравенств исходной системы, перепишем ее в виде

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2-1} > 0, \\ \dfrac{2007}{2x+3} > 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Так как $2007 > 0$, то система (4) равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} > 0, \\ 2x+3 > 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Все решения первого неравенства системы (5) составляют множество $(-\infty; -1)\cup(0; 1)\cup(1; +\infty)$ (рис. 46, *а*), все решения второго неравенства системы (5) составляют промежуток $(-1{,}5; +\infty)$ (рис. 46, *б*). Поэтому все решения исходной системы неравенств составляют множество $(-1{,}5; -1)\cup$ $\cup(0; 1)\cup(1; +\infty)$ (рис. 46, *в*).

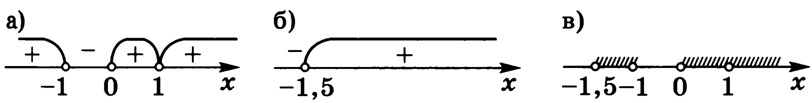

Рис. 46

Ответ. а) Нет решений; б) $(-1{,}5; -1)\cup(0; 1)\cup(1; +\infty)$.

10. Нестрогие неравенства

Пример 1. Решим неравенство:

а) $5(2x - 7) - 2(5x - 4) \leqslant 1 - 4x$; б) $x^2 - 4x + 5 \geqslant 0$.

Решение. а) Сначала решим уравнение

$$5(2x - 7) - 2(5x - 4) = 1 - 4x. \qquad (1)$$

Оно имеет единственное решение $x_0 = 7$.

Теперь решим неравенство

$$5(2x - 7) - 2(5x - 4) < 1 - 4x. \qquad (2)$$

Все его решения составляют промежуток $(-\infty; 7)$.

Объединяя все решения уравнения (1) и неравенства (2), получим множество всех решений исходного неравенства: $(-\infty; 7]$.

б) Сначала решим уравнение

$$x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Оно не имеет решений.

Теперь решим неравенство

$$x^2 - 4x + 5 > 0.$$

Оно имеет множество решений $\boldsymbol{R}$.

Следовательно, исходное неравенство имеет множество решений $\boldsymbol{R}$.

Ответ. а) $(-\infty; 7]$; б) $\boldsymbol{R}$.

Пример 2. Решим неравенство:

а) $\frac{(x+1)(x-3)}{x} \geqslant 0$; б) $\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-3)} \leqslant 0$.

Решение. а) Сначала решим уравнение

$$\frac{(x+1)(x-3)}{x} = 0. \qquad (3)$$

Оно имеет два решения: $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$.

Теперь решим неравенство

$$\frac{(x+1)(x-3)}{x} > 0. \qquad (4)$$

Все его решения составляют два промежутка: $(-1; 0)$ и $(3; +\infty)$ (рис. 47, *а*).

Объединяя все решения уравнения (3) и неравенства (4), получим, что исходное неравенство имеет множество решений $[-1; 0)\cup[3; +\infty)$ (рис. 47, *б*).

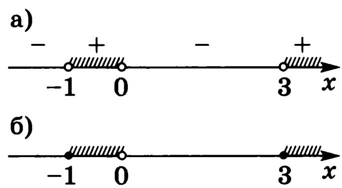

Рис. 47

б) Сначала решим уравнение

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-3)} = 0. \qquad (5)$$

Оно имеет два решения: $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$.

Теперь решим неравенство

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-3)} < 0. \qquad (6)$$

Все его решения составляют два промежутка: $(1; 2)$ и $(3; 4)$ (рис. 48, *а*).

Объединяя все решения уравнения (5) и неравенства (6), получим, что исходное неравенство имеет множество решений $[1; 2) \cup (3; 4]$ (рис. 48, *б*).

Ответ. а) $[-1; 0) \cup [3; +\infty)$; б) $[1; 2) \cup (3; 4]$.

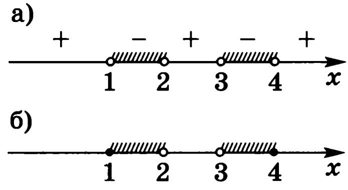

Рис. 48

Пример 3. Решим неравенство:

а) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-6} \geqslant 0$; б) $\dfrac{x^2-8x+16}{x^2+5} \leqslant 0$.

Решение. а) Сначала решим уравнение

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+x-6} = 0. \qquad (7)$$

Оно имеет два решения: $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$.

Теперь решим неравенство $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-6} > 0$, переписав его в виде

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-2)} > 0. \qquad (8)$$

Все его решения составляют три промежутка: $(-\infty; -3)$, $(-2; 1)$ и $(2; +\infty)$ (рис. 49, *а*).

Объединяя все решения уравнения (7) и неравенства (8), получим, что исходное неравенство имеет множество решений $(-\infty; -3) \cup [-2; 1] \cup (2; +\infty)$ (рис. 49, *б*).

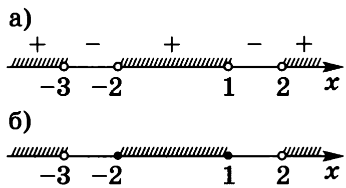

Рис. 49

б) Сначала решим уравнение

$$\frac{x^2-8x+16}{x^2+5} = 0.$$

Оно имеет единственное решение $x_0 = 4$.

Теперь решим неравенство

$$\frac{x^2-8x+16}{x^2+5} < 0. \qquad (9)$$

Так как для любого x справедливы неравенства $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \geqslant 0$ и $x^2 + 5 > 0$, то неравенство (9) не имеет решений.

Следовательно, исходное неравенство имеет единственное решение $x_0 = 4$.

Ответ. а) $(-\infty; -3) \cup [-2; 1] \cup (2; +\infty)$; б) 4.

11*. Нестрогие неравенства (продолжение)

Пример 1. Решим неравенство:

а) $(x + 1)^2(x - 1)(x - 3) \leqslant 0$; б) $\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(x-4)} \geqslant 0$.

Решение. а) Сначала решим уравнение

$$(x + 1)^2(x - 1)(x - 3) = 0. \qquad (1)$$

Оно имеет три решения: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 3$.

Теперь решим неравенство

$$(x + 1)^2(x - 1)(x - 3) < 0. \qquad (2)$$

Все его решения составляют промежуток $(1; 3)$ (рис. 50, *а*).

Объединяя все решения уравнения (1) и неравенства (2), получим, что исходное неравенство имеет множество решений $\{-1\} \cup [1; 3]$ (рис. 50, *б*).

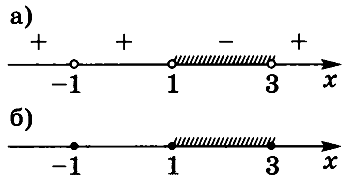

Рис. 50

б) Сначала решим уравнение

$$\frac{(x+2)^2}{(x+1)(x-4)} = 0. \qquad (3)$$

Оно имеет единственное решение $x_0 = -2$.

Теперь решим неравенство

$$\frac{(x+2)^2}{(x+1)(x-4)} > 0. \qquad (4)$$

Все его решения составляют три промежутка: $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$ и $(4; +\infty)$ (рис. 51, *а*).

Объединяя все решения уравнения (3) и неравенства (4), получим, что исходное неравенство имеет множество решений $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$ (рис. 51, *б*).

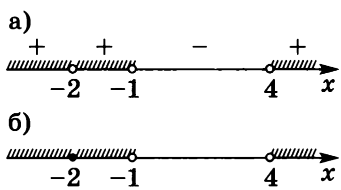

Рис. 51

Ответ. а) $\{-1\} \cup [1; 3]$; б) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Пример 2. Решим неравенство:

а) $\dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} \geqslant 0$; б) $x^4 - 16 \leqslant \dfrac{2x^4 - 32}{x}$.

Решение. а) Разложив на множители числитель дроби, перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{x-3} \geqslant 0. \qquad (5)$$

Сначала решим уравнение

$$\frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{x-3}=0. \qquad (6)$$

Оно имеет два решения: $x_1=-2$, $x_2=2$.

Теперь решим неравенство

$$\frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{x-3}>0. \qquad (7)$$

Все его решения составляют три промежутка: $(-\infty; -2)$, $(2; 3)$ и $(3; +\infty)$ (рис. 52, *а*).

Объединяя все решения уравнения (6) и неравенства (7), получим, что исходное неравенство имеет множество решений $(-\infty; -2] \cup [2; 3) \cup (3; +\infty)$ (рис. 52, *б*).

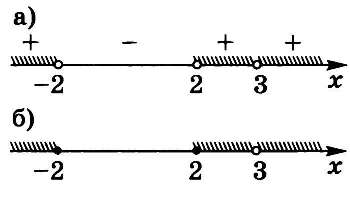

Рис. 52

б) Перенеся все члены исходного неравенства в левую часть, перепишем его в виде

$$\frac{(x+2)(x-2)^2(x^2+4)}{x}\leqslant 0. \qquad (8)$$

Так как для любого x справедливо неравенство $x^2+4>0$, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x+2)(x-2)^2}{x}\leqslant 0. \qquad (9)$$

Сначала решим уравнение

$$\frac{(x+2)(x-2)^2}{x}=0. \qquad (10)$$

Оно имеет два решения: $x_1=-2$ и $x_2=2$.

Теперь решим неравенство

$$\frac{(x+2)(x-2)^2}{x}<0. \qquad (11)$$

Все его решения составляют промежуток $(-2; 0)$ (рис. 53, *а*).

Объединяя все решения уравнения (10) и неравенства (11), получим, что исходное неравенство имеет множество решений $[-2; 0) \cup \{2\}$ (рис. 53, *б*).

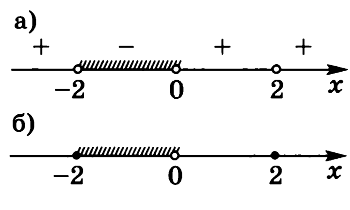

Рис. 53

Ответ. а) $(-\infty; -2] \cup [2; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $[-2; 0) \cup \{2\}$.

Пример 3. Решим систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1}\geqslant 0, \\ x^2+x-6\leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+3)(x-1)\geqslant 0, \\ (x-1)(x-4)\geqslant 0. \end{cases}$

Решение. а) Все решения первого неравенства исходной системы составляют два промежутка: $(-\infty; -2]$ и $(1; +\infty)$ (рис. 54, *а*).

Все решения второго неравенства исходной системы составляют промежуток $[-3; 2]$ (рис. 54, *б*). Поэтому все решения исходной системы составляют множество $[-3; -2] \cup (1; 2]$ (рис. 54, *в*).

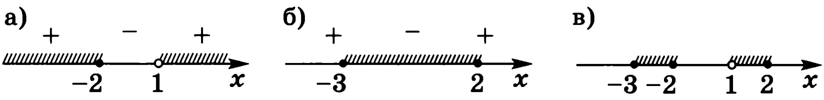

Рис. 54

б) Все решения первого неравенства исходной системы составляют два промежутка: $(-\infty; -3]$ и $[1; +\infty)$ (рис. 55, *а*).

Все решения второго неравенства исходной системы составляют два промежутка: $(-\infty; 1]$ и $[4; +\infty)$ (рис. 55, *б*). Поэтому все решения исходной системы составляют множество $(-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [4; +\infty)$ (рис. 55, *в*).

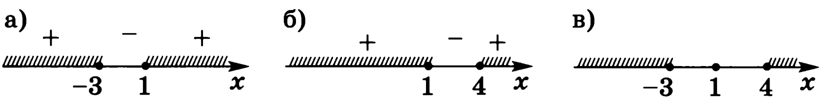

Рис. 55

Ответ. а) $[-3; -2] \cup (1; 2]$; б) $(-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [4; +\infty)$.

Пример 4. Решим систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} \leqslant 0, \\ x^2 + 2x - 8 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4 \geqslant \dfrac{-15}{x + 4}, \\ x \leqslant \dfrac{4}{x}. \end{cases}$

Решение. а) Все решения первого неравенства исходной системы составляют множество $(-\infty; -1) \cup \{1\}$ (рис. 56, *а*).

Все решения второго неравенства исходной системы составляют промежуток $[-4; 2]$ (рис. 56, *б*). Поэтому все решения исходной системы составляют множество $[-4; -1) \cup \{1\}$ (рис. 56, *в*).

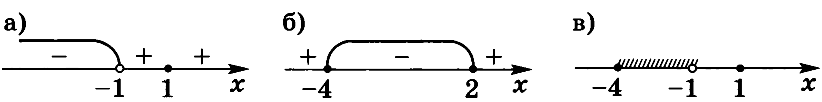

Рис. 56

б) Перенеся все члены неравенств исходной системы в левую часть, сложив дроби и разложив на множители числители дробей в левых частях неравенств, перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+4} \geqslant 0, \\ \dfrac{(x+2)(x-2)}{x} \leqslant 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Все решения первого неравенства системы (12) составляют два промежутка: $(-4; -1]$ и $[1; +\infty)$ (рис. 57, *а*).

Все решения второго неравенства системы (12) составляют два промежутка: $(-\infty; -2]$ и $(0; 2]$ (рис. 57, *б*). Поэтому все решения исходной системы составляют два промежутка: $(-4; -2]$ и $[1; 2]$ (рис. 57, *в*).

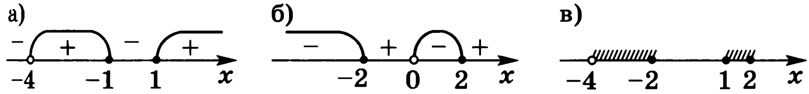

Рис. 57

Ответ. а) $[-4; -1) \cup \{1\}$; б) $(-4; -2] \cup [1; 2]$.

12*. Замена неизвестного при решении рациональных неравенств

Пример 1. Решим неравенство

$$(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 \leqslant 0. \qquad (1)$$

Решение. Введя новое неизвестное $t = x^2 - 3x$, перепишем неравенство (1) в виде

$$t^2 - 2t - 8 \leqslant 0. \qquad (2)$$

Неравенству (2) удовлетворяют все t, такие, что $-2 \leqslant t \leqslant 4$. Следовательно, все решения неравенства (1) совпадают с решениями двойного неравенства $-2 \leqslant x^2 - 3x \leqslant 4$, которое можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} x^2 - 3x \geqslant -2, \\ x^2 - 3x \leqslant 4. \end{cases} \qquad (3)$$

Первое неравенство системы (3) имеет множество решений $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ (рис. 58, *а*), а второе неравенство системы (3) имеет множество решений $[-1; 4]$ (рис. 58, *б*). Следовательно, система неравенств (3), а значит, и неравенство (1) имеют множество решений $[-1; 1] \cup [2; 4]$ (рис. 58, *в*).

Ответ. $[-1; 1] \cup [2; 4]$.

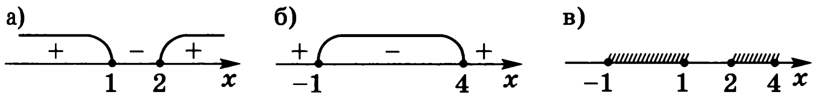

Рис. 58

Пример 2. Решим неравенство

$$\left(\frac{x^2-x}{x+1}\right)^2+\frac{5x^2-5x}{x+1}-6\leqslant 0. \qquad (4)$$

Решение. Введя новое неизвестное $t=\frac{x^2-x}{x+1}$, перепишем неравенство (4) в виде

$$t^2+5t-6\leqslant 0. \qquad (5)$$

Неравенству (5) удовлетворяют все t, такие, что $-6\leqslant t\leqslant 1$. Следовательно, все решения неравенства (4) совпадают с решениями двойного неравенства $-6\leqslant\frac{x^2-x}{x+1}\leqslant 1$, которое можно переписать в виде системы

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x+1}\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{x^2-x}{x+1}\geqslant -6.\end{cases} \qquad (6)$$

Первое неравенство системы (6) имеет множество решений $(-\infty;\ -1)\cup\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$ (рис. 59, *а*). Второе неравенство системы (6) имеет множество решений $[-3;\ -2]\cup(-1;\ +\infty)$ (рис. 59, *б*). Поэтому система (6), а значит, и неравенство (4) имеют множество решений $[-3;\ -2]\cup\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$ (рис. 59, *в*).

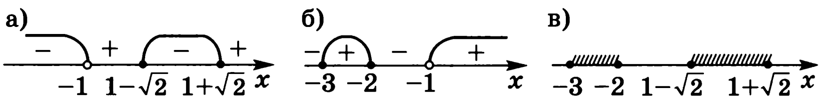

Рис. 59

Ответ. $[-3;\ -2]\cup\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$.

Пример 3. Решим неравенство

$$\frac{x^2+4x+5}{x^2+2x+2}-\frac{2x^2+4x+4}{x^2+4x+5}\leqslant 1. \qquad (7)$$

Решение. Введя новое неизвестное $t=\frac{x^2+4x+5}{x^2+2x+2}$, перепишем неравенство (7) в виде $t-\frac{2}{t}-1\leqslant 0$ или в виде

$$\frac{(t+1)(t-2)}{t}\leqslant 0. \qquad (8)$$

Неравенству (8) удовлетворяют все $t \leqslant -1$ и все t, такие, что $0 < t \leqslant 2$, поэтому множество решений неравенства (7) есть объединение множеств решений неравенства

$$\frac{x^2+4x+5}{x^2+2x+2} \leqslant -1 \qquad (9)$$

и системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+4x+5}{x^2+2x+2} > 0, \\ \dfrac{x^2+4x+5}{x^2+2x+2} \leqslant 2. \end{cases} \qquad (10)$$

Далее нужно решить неравенство (9) и систему неравенств (10) и объединить их множества решений. Однако заметим, что $\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+2x+2} = \dfrac{(x+2)^2+1}{(x+1)^2+1} > 0$ для любого значения x. Поэтому неравенство (9) не имеет решений, а первое неравенство системы (10) справедливо для любых x. Следовательно, множество решений неравенства (7) совпадает с множеством решений неравенства

$$\frac{x^2+4x+5}{x^2+2x+2} \leqslant 2. \qquad (11)$$

Неравенство (11), а значит, и неравенство (7) имеют множество решений $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

13*. Замена неизвестного при решении иррациональных уравнений и неравенств

Пример 1. Решим уравнение

$$\sqrt{x^2-5x+10} = 2. \qquad (1)$$

Решение. Введя новое неизвестное $t = x^2 - 5x + 10$, перепишем уравнение (1) в виде

$$\sqrt{t} = 2. \qquad (2)$$

Функция $y = \sqrt{t}$ определена на множестве $[0; +\infty)$ и возрастает на этом множестве, поэтому значение 2 она принимает только один раз при $t = 2^2$. Следовательно, все корни уравнения (1) совпадают с корнями уравнения

$$x^2 - 5x + 10 = 4. \qquad (3)$$

Так как уравнение (3) имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, то и уравнение (1) имеет те же корни.

Ответ. 2; 3.

Пример 2. Решим уравнение
$$\sqrt{x+1} = 4 - 2x. \qquad (4)$$

Решение. Введя новое неизвестное $t = \sqrt{x+1}$, перепишем уравнение (4) в виде
$$2t^2 + t - 6 = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) имеет два корня: $t_1 = \frac{3}{2}$ и $t_2 = -2$. Следовательно, множество корней уравнения (4) совпадает с объединением множеств корней двух уравнений:
$$1)\ \sqrt{x+1} = \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad 2)\ \sqrt{x+1} = -2.$$

Функция $y = \sqrt{x+1}$ определена на множестве $[-1; +\infty)$ и неотрицательна на этом множестве, поэтому она не может принять значение -2, а это означает, что уравнение 2) не имеет корней.

Так как эта функция на множестве $[-1; +\infty)$ возрастает, то значение $\frac{3}{2}$ она принимает только один раз при $x + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Поэтому уравнение 1) имеет единственный корень $\frac{5}{4}$. Следовательно, уравнение (4) имеет единственный корень $\frac{5}{4}$.

Ответ. $\frac{5}{4}$.

Пример 3. Решим уравнение
$$\sqrt{3x+4} - \sqrt{4x-7} = 1. \qquad (6)$$

Решение. Введя новые неизвестные $u = \sqrt{3x+4}$, $v = \sqrt{4x-7}$, перепишем уравнение (6) в виде $u - v = 1$. Поскольку
$$4u^2 - 3v^2 = 4(3x + 4) - 3(4x - 7) = 12x + 16 - 12x + 21 = 37,$$
то получим второе уравнение $4u^2 - 3v^2 = 37$.

Решив систему двух уравнений
$$\begin{cases} u - v = 1, \\ 4u^2 - 3v^2 = 37, \end{cases}$$
получим два ее решения: $u_1 = -10$, $v_1 = -11$; $u_2 = 4$, $v_2 = 3$.

Поэтому все решения уравнения (6) являются объединением всех решений двух систем:

$$\begin{cases}\sqrt{3x+4}=-10,\\ \sqrt{4x-7}=-11.\end{cases} \quad (7)$$

и

$$\begin{cases}\sqrt{3x+4}=4,\\ \sqrt{4x-7}=3\end{cases} \quad (8)$$

Так как функция $y=\sqrt{t}$ определена на множестве $[0; +\infty)$ и неотрицательна на этом множестве, то ни одно из уравнений системы (7) не имеет решений, следовательно, система (7) не имеет решений.

Функция $y=\sqrt{t}$ возрастает на множестве $[0; +\infty)$, поэтому значение 4 она принимает только один раз при $t = 4^2$. Следовательно, корень первого уравнения системы (8) является корнем уравнения $3x + 4 = 16$, он равен $x_1 = 4$. Число x_1 является также корнем второго уравнения системы (8). Следовательно, x_1 — единственное решение системы (8). Поэтому уравнение (6) имеет единственное решение x_1.

Ответ. 4.

Пример 4. Решим неравенство

$$\sqrt{2x-3} \leqslant 3. \quad (9)$$

Решение. Введя новое неизвестное $t = 2x - 3$, перепишем неравенство (9) в виде

$$\sqrt{t} \leqslant 3. \quad (10)$$

Функция $y=\sqrt{t}$ определена на множестве $[0; +\infty)$ и возрастает на этом множестве, поэтому все решения неравенства (10) совпадают с решениями двойного неравенства $0 \leqslant t \leqslant 3^2$. Следовательно, все решения неравенства (9) совпадают с решениями двойного неравенства

$$0 \leqslant 2x - 3 \leqslant 9. \quad (11)$$

Так как двойное неравенство (11) имеет решения: все $x \in [1{,}5; 6]$, то и неравенство (9) имеет те же решения.

Ответ. $[1{,}5; 6]$.

Пример 5. Решим неравенство

$$x - 11\sqrt{x} + 10 \leqslant 0. \quad (12)$$

Решение. Введя новое неизвестное $t = \sqrt{x}$, перепишем неравенство (12) в виде

$$t^2 - 11t + 10 \leqslant 0. \qquad (13)$$

Решениями неравенства (13) являются все t, такие, что $1 \leqslant t \leqslant 10$. Так как функция $t = \sqrt{x}$ определена на множестве $[0; +\infty)$ и возрастает на этом множестве, а значения 1 и 10 эта функция принимает в точках $x = 1$ и $x = 100$, то значения функции $t = \sqrt{x}$ составляют промежуток $[1; 10]$ лишь при $x \in [1; 100]$. Это означает, что все решения неравенства (12) составляют промежуток $[1; 100]$.

Ответ. $[1; 100]$.

Пример 6. Решим неравенство

$$\frac{6x}{x+2} - 2\sqrt{\frac{6x}{x+2}} - 3 \geqslant 0. \qquad (14)$$

Решение. Введя новое неизвестное $t = \sqrt{\frac{6x}{x+2}}$, перепишем неравенство (14) в виде

$$t^2 - 2t - 3 \geqslant 0. \qquad (15)$$

Решениями неравенства (15) являются все $t \leqslant -1$ и все $t \geqslant 3$. Следовательно, множество решений неравенства (14) есть объединение множеств решений двух неравенств:

$$1)\ \sqrt{\frac{6x}{x+2}} \leqslant -1 \quad \text{и} \quad 2)\ \sqrt{\frac{6x}{x+2}} \geqslant 3.$$

Неравенство 1) не имеет решений, так как при всех x, при которых функция $\sqrt{\frac{6x}{x+2}}$ определена, справедливо неравенство $\sqrt{\frac{6x}{x+2}} \geqslant 0$.

Так как функция $y = \sqrt{u}$ определена лишь при $u \geqslant 0$ и для этих u она возрастает, то неравенство $\sqrt{u} \geqslant \sqrt{9}$ справедливо тогда и только тогда, когда $u \geqslant 9$, поэтому неравенство 2) равносильно неравенству $\frac{6x}{x+2} \geqslant 9$, множество решений которого $[-6; -2)$.

Следовательно, множество всех решений неравенства (14) составляет промежуток $[-6; -2)$.

Ответ. $[-6; -2)$.

14. Корень степени n

Для любого числа $a \in \boldsymbol{R}$ и любого натурального числа k верны равенства:

1. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$. 2. $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$.

Пример 1. Вычислим:

а) $\sqrt[3]{-125}$; б) $\sqrt[8]{(-3)^8}$;

в) $\sqrt[3]{-1\frac{91}{125}}$; г) $\sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{-27}$.

Решение. а) $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$ (по свойству 2).

б) $\sqrt[8]{(-3)^8} = |-3| = 3$ (по свойству 1).

в) $\sqrt[3]{-1\frac{91}{125}} = \sqrt[3]{-\frac{216}{125}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{6}{5}\right)^3} = -\frac{6}{5}$ (по свойству 2).

г) $\sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{-27} = \sqrt[4]{3^4} + \sqrt[3]{(-3)^3} = 3 + (-3) = 0$ (по свойствам 1 и 2).

Ответ. а) -5; б) 3; в) $-\frac{6}{5}$; г) 0.

Для любых неотрицательных чисел a и b и любых натуральных чисел m, n и k, больших 1, верны равенства:

3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. 4. $\sqrt[n]{a^n} = a$. 5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

6. $\sqrt[m \cdot n]{a^m} = \sqrt[n]{a}$. 7. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$. 8. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

9. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$.

Пример 2. Вычислим:

а) $2\sqrt[11]{13} - 5\sqrt[11]{13} + 3\sqrt[11]{13}$; б) $(\sqrt{14})^2 - \sqrt[4]{13^4} + (\sqrt[6]{20^2})^3$;

в) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} + \frac{\sqrt[7]{8^5}}{\sqrt[7]{2}}$.

Решение. а) Вынеся общий множитель $\sqrt[11]{13}$ за скобки, преобразуем данное выражение:

$$2\sqrt[11]{13} - 5\sqrt[11]{13} + 3\sqrt[11]{13} = \sqrt[11]{13} \cdot (2 - 5 + 3) = \sqrt[11]{13} \cdot 0 = 0.$$

б) $(\sqrt{14})^2 - \sqrt[4]{13^4} + (\sqrt[6]{20^2})^3 = 14 - 13 + \sqrt[6]{(20^2)^3} = 1 + \sqrt[6]{20^6} =$ $= 1 + 20 = 21$ (по свойствам 3, 4, 5).

в) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}+\dfrac{\sqrt[7]{8^5}}{\sqrt[7]{2}}=\sqrt[3]{9\cdot 3}+\sqrt[7]{\dfrac{8^5}{2}}=\sqrt[3]{27}+\sqrt[7]{\dfrac{2^{15}}{2}}=\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[7]{2^{14}}=$

$=3+\sqrt[7]{\left(2^2\right)^7}=3+2^2=7$ (по свойствам 4, 8, 9).

Ответ. а) 0; б) 21; в) 7.

Пример 3. Упростим выражение:

а) $(\sqrt{17}-\sqrt{15})(\sqrt{17}+\sqrt{15})$;

б) $(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{9})$;

в) $(\sqrt[4]{7}-1)(\sqrt[4]{7^3}+\sqrt[4]{7^2}+\sqrt[4]{7}+1)$;

г) $(\sqrt[4]{72}-\sqrt[4]{32})(\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{8})$.

Решение. а) Так как $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, то $(\sqrt{17}-\sqrt{15})(\sqrt{17}+\sqrt{15})=(\sqrt{17})^2-(\sqrt{15})^2=17-15=2$ (по свойству 3).

б) Так как $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$, то $(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3})\times$ $\times(\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{9})=(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{6^2}+\sqrt[3]{6\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2})=(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3})\times$ $((\sqrt[3]{6})^2+\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2)=(\sqrt[3]{6})^3-(\sqrt[3]{3})^3=6-3=3$ (по свойствам 3, 5, 8).

в) Так как $(a-1)(a^3+a^2+a+1)=a^4-a^3+a^3-a^2+a^2-$ $-a+a-1=a^4-1$, то

$(\sqrt[4]{7}-1)(\sqrt[4]{7^3}+\sqrt[4]{7^2}+\sqrt[4]{7}+1)=(\sqrt[4]{7}-1)((\sqrt[4]{7})^3+(\sqrt[4]{7})^2+\sqrt[4]{7}+1)=$
$=(\sqrt[4]{7})^4-1=7-1=6$ (по свойствам 3, 5).

г) Этот пример можно решить двумя способами.

I способ.

$\left(\sqrt[4]{72}-\sqrt[4]{32}\right)\left(\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{8}\right)=\sqrt[4]{72}\cdot\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{32}\cdot\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{72}\cdot\sqrt[4]{8}-$
$-\sqrt[4]{32}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{72\cdot 18}-\sqrt[4]{32\cdot 18}+\sqrt[4]{72\cdot 8}-\sqrt[4]{32\cdot 8}=$
$=\sqrt[4]{6^4}-\sqrt[4]{16\cdot 36}+\sqrt[4]{16\cdot 36}-\sqrt[4]{4^4}=6-4=2$

(по свойствам 4, 8).

II способ.

$$\left(\sqrt[4]{72}-\sqrt[4]{32}\right)\left(\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{8}\right)=\left(\sqrt[4]{8\cdot 9}-\sqrt[4]{8\cdot 4}\right)\left(\sqrt[4]{2\cdot 9}+\sqrt[4]{2\cdot 4}\right)=$$

$$=\left(\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{9}-\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{4}\right)\left(\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{4}\right)=\sqrt[4]{8}\cdot\left(\sqrt[4]{9}-\sqrt[4]{4}\right)\cdot\sqrt[4]{2}\times$$

$$\times\left(\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{4}\right)=\sqrt[4]{16}\cdot\left(\left(\sqrt[4]{9}\right)^2-\left(\sqrt[4]{4}\right)^2\right)=2\cdot\left(\sqrt[4]{3^4}-\sqrt[4]{2^4}\right)=2\cdot(3-2)=2$$

(по свойствам 5, 8).

Ответ. а) 2; б) 3; в) 6; г) 2.

Пример 4. Упростим выражение:

а) $\left(\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)$; б) $\dfrac{61}{5-\sqrt[3]{3}}-\dfrac{15+3\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{9}}$.

Решение.

а) $$\left(\frac{1}{3-\sqrt{2}}-\frac{1}{3+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)=\frac{3+\sqrt{2}-3+\sqrt{2}}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{9\cdot 2}-\sqrt{4\cdot 2}\right)=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3-2}\cdot\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4.$$

б) $$\frac{61}{5-\sqrt[3]{3}}-\frac{15+3\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{9}}=\frac{61\cdot 2\sqrt[3]{9}-3\left(5+\sqrt[3]{3}\right)\left(5-\sqrt[3]{3}\right)}{\left(5-\sqrt[3]{3}\right)2\sqrt[3]{9}}=\frac{122\sqrt[3]{9}-3\left(5^2-\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right)}{\left(5-\sqrt[3]{3}\right)2\sqrt[3]{9}}=$$

$$=\frac{125\sqrt[3]{9}-75}{2\left(5\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{27}\right)}=\frac{25\left(5\sqrt[3]{9}-3\right)}{2\left(5\sqrt[3]{9}-3\right)}=12{,}5.$$

Ответ. а) 4; б) 12,5.

Пример 5. Упростим выражение $\dfrac{1}{9+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{4}}-\dfrac{\sqrt[3]{-2}}{25}$.

Решение. Преобразуем знаменатель дроби:

$9+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{4}=3^2+3\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$ — это неполный квадрат суммы чисел 3 и $\sqrt[3]{2}$. Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби, умножим ее числитель и знаменатель на разность этих чисел:

$$\frac{1}{9+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{4}}-\frac{\sqrt[3]{-2}}{25}=\frac{3-\sqrt[3]{2}}{\left(3-\sqrt[3]{2}\right)\left(3^2+3\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right)}-\frac{-\sqrt[3]{2}}{25}=\frac{3-\sqrt[3]{2}}{3^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}+\frac{\sqrt[3]{2}}{25}=$$

$$=\frac{3-\sqrt[3]{2}}{25}+\frac{\sqrt[3]{2}}{25}=\frac{3}{25}.$$

Ответ. $\dfrac{3}{25}$.

15*. Корень степени *n* (продолжение)

Пример 1. Упростим выражение $\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}$ и найдем его значение при $x = \sqrt[5]{5^{12}}$.

Решение. Так как $x \geqslant 0$ (в противном случае выражение $\sqrt[4]{x}$ не имеет смысла), то

$$\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^4 \cdot x}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5}} = \sqrt[12]{x^5}.$$

Тогда $\sqrt[12]{\left(\sqrt[5]{5^{12}}\right)^5} = \sqrt[12]{5^{12}} = 5$ (по свойствам 3, 4, 7, 8 из п. 14).

Ответ. $\sqrt[12]{x^5}$; 5.

Пример 2. Найдем значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{81x^4y^5}}{2x\sqrt[4]{y}}$ при $x = -\frac{1}{7}$; $y = 2$;

б) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right) \cdot \dfrac{x+y}{\sqrt{3}}$ при $x = \sqrt[4]{10 - 2\sqrt{21}}$; $y = \sqrt[4]{10 + 2\sqrt{21}}$.

Решение. а) Воспользовавшись свойством 1 (из п. 14) и тем, что $y > 0$ (в противном случае данное выражение не имеет смысла), преобразуем данное выражение:

$$A = \frac{\sqrt[4]{81x^4y^5}}{2x\sqrt[4]{y}} = \frac{\sqrt[4]{3^4x^4y^4y}}{2x\sqrt[4]{y}} = \frac{\sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{y^4} \cdot \sqrt[4]{y}}{2x\sqrt[4]{y}} = \frac{3|x||y|}{2x}.$$

Так как по условию задачи $x < 0$, а $y > 0$, то $|x| = -x$, $|y| = y$ и выражение A можно записать в виде $A = \frac{3(-x)y}{2x} = -\frac{3y}{2}$.

Тогда при $x = -\frac{1}{7}$, $y = 2$ имеем $A = -\frac{3 \cdot 2}{2} = -3$.

б) Преобразуем данное выражение при $x \neq 0$, $y \neq 0$ (в противном случае данное выражение не имеет смысла):

$$B = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{x+y}{\sqrt{3}} = \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{3}} = \frac{y^2-x^2}{xy\sqrt{3}}.$$

При заданных значениях x и y имеем

$$y^2 - x^2 = \left(\sqrt[4]{10+2\sqrt{21}}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{10-2\sqrt{21}}\right)^2 = \sqrt{10+2\sqrt{21}} - \sqrt{10-2\sqrt{21}} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \left(\sqrt{7}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \left(\sqrt{7}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{3} - \sqrt{7}\right)^2} = \left|\sqrt{3} + \sqrt{7}\right| - \left|\sqrt{3} - \sqrt{7}\right| =$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{7} - \left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{7} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$

$$xy = \sqrt[4]{10 - 2\sqrt{21}} \cdot \sqrt[4]{10 + 2\sqrt{21}} = \sqrt[4]{\left(\sqrt{3} - \sqrt{7}\right)^2} \cdot \sqrt[4]{\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2} =$$

$$= \sqrt[4]{\left(\sqrt{3} - \sqrt{7}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2} = \sqrt[4]{\left(\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2\right)^2} = \sqrt[4]{(3 - 7)^2} = 2.$$

Значит, $B = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1.$

Ответ. а) -3; б) 1.

Пример 3. а) Вынесем множитель из-под знака корня $\sqrt[4]{16x^4y}$ при условии, что $x < 0$.

б) Внесем множитель под знак корня $3y\sqrt[4]{x}$ при условии, что $y < 0$.

Решение. а) Так как $x < 0$ по условию задачи, а $y \geqslant 0$ (в противном случае выражение не имеет смысла), то

$$\sqrt[4]{16x^4y} = \sqrt[4]{2^4 \cdot x^4 \cdot y} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{y} = 2|x|\sqrt[4]{y} = -2x\sqrt[4]{y}.$$

б) Так как $y < 0$ по условию задачи, а $x \geqslant 0$ (в противном случае не имеет смысла выражение $\sqrt[4]{x}$), то

$$3y\sqrt[4]{x} = -(-y) \cdot \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{x} = -\sqrt[4]{(-y)^4} \cdot \sqrt[4]{3^4 \cdot x} = -\sqrt[4]{(-y)^4 \cdot 81x} =$$

$$= -\sqrt[4]{81xy^4}.$$

Ответ. а) $-2x\sqrt[4]{y}$; б) $-\sqrt[4]{81xy^4}$.

16*. Степень с рациональным показателем

Пример 1. Вычислим:

а) $9^{\frac{3}{2}} - (0,25)^{-\frac{1}{2}} + \left(\sqrt[4]{25}\right)^2$; б) $\left(\sqrt[3]{25}\right)^4 - 125^{\frac{8}{9}} + \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^5 \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$.

Решение. Применяя свойства степени с рациональным показателем, преобразуем данное выражение:

а) $9^{\frac{3}{2}} - (0,25)^{-\frac{1}{2}} + \left(\sqrt[4]{25}\right)^2 = \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(5^{\frac{2}{4}}\right)^2 =$

$= 3^3 - \left(2^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 5^{\frac{4}{4}} = 27 - 2 + 5 = 30;$

б) $\left(\sqrt[3]{25}\right)^4 - 125^{\frac{8}{9}} + \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^5 \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} = (5^2)^{\frac{4}{3}} - (5^3)^{\frac{8}{9}} + \frac{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^5 \cdot \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^5 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}} =$

$= 5^{\frac{8}{3}} - 5^{\frac{8}{3}} + \frac{3^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{3} + \frac{1}{3}} = 3^2 \cdot 2^2 = 36.$

Ответ. а) 30; б) 36.

Пример 2. Вычислим:

а) $\left(13^{\frac{1}{2}} - 11^{\frac{1}{2}}\right)\left(13^{\frac{1}{2}} + 11^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $\left(7^{\frac{1}{3}} + 6^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}} - 42^{\frac{1}{3}} + 6^{\frac{2}{3}}\right)$.

Решение. Применяя формулы сокращенного умножения и свойства степеней с рациональным показателем, преобразуем данное выражение:

а) $\left(13^{\frac{1}{2}} - 11^{\frac{1}{2}}\right)\left(13^{\frac{1}{2}} + 11^{\frac{1}{2}}\right) = \left(13^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(11^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 13 - 11 = 2;$

б) $\left(7^{\frac{1}{3}} + 6^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}} - 42^{\frac{1}{3}} + 6^{\frac{2}{3}}\right) = \left(7^{\frac{1}{3}} + 6^{\frac{1}{3}}\right)\left(\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 7^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} + \left(6^{\frac{1}{3}}\right)^2\right) =$

$= \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(6^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 7 + 6 = 13.$

Ответ. а) 2; б) 13.

Пример 3. Найдем значение выражения $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}\right) \times$

$\times \left(1 - a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)$, если $a = 27$.

Решение. Сначала упростим данное выражение.

I способ.

$\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}\right)\left(1 - a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right) = \left(1 + a^{\frac{1}{4}}\right) \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot \left(1 - a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right) =$

$= \left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{4}} - 1\right)\left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 - 1^2\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right) =$

$= \left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right) = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1^2 = a - 1.$

II способ.

$$\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}\right)\left(1-a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{-\frac{1}{4}}\right)\times$$

$$\times\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)=$$

$$=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}-1=a-1.$$

Если $a = 27$, то $a - 1 = 27 - 1 = 26$.

Ответ. 26.

17. Числовые последовательности

Пример 1. Сколько отрицательных членов содержит последовательность, заданная формулой n-го члена $a_n = -200 + \frac{3n}{4}$?

Решение. Здесь требуется выяснить, для скольких членов последовательности $\{a_n\}$ справедливо неравенство $a_n < 0$. Решим неравенство

$$-200 + \frac{3n}{4} < 0. \qquad (1)$$

Неравенству (1) удовлетворяют все $n < 266\frac{2}{3}$, поэтому данная последовательность содержит 266 отрицательных членов.

Ответ. 266.

Пример 2. Докажем, что последовательность, заданная формулой n-го члена $b_n = \frac{n+12}{n+7}$, является убывающей.

Доказательство. Для любого $n \in N$ имеем

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n+13}{n+8} - \frac{n+12}{n+7} = \frac{n^2+13n+7n+91-(n^2+12n+8n+96)}{(n+8)(n+7)} =$$

$$= \frac{-5}{(n+8)(n+7)} < 0,$$

поэтому справедливо неравенство $b_{n+1} < b_n$. Это означает, что последовательность $\{b_n\}$ является убывающей, что и требовалось доказать.

Пример 3. Определим номер наименьшего члена последовательности, заданной формулой n-го члена $c_n = n^2 - 11\frac{2}{3}n + 13$.

Решение. Перепишем формулу n-го члена, выделив полный квадрат:

$$c_n = n^2 - 2n \cdot \frac{35}{6} + \left(\frac{35}{6}\right)^2 - \left(\frac{35}{6}\right)^2 + 13 = \left(n - 5\frac{5}{6}\right)^2 - 21\frac{1}{36}.$$

Наименьшее значение c_n достигает при значении n, близком к $5\frac{5}{6}$, т. е. либо при $n = 5$, либо при $n = 6$. Сравним значения c_n при этих n:

$$c_5 = \left(5 - 5\frac{5}{6}\right)^2 - 21\frac{1}{36} = -20\frac{1}{3},$$

$$c_6 = \left(6 - 5\frac{5}{6}\right)^2 - 21\frac{1}{36} = -21.$$

Так как $-21 < -20\frac{1}{3}$, то наименьший член последовательности $\{c_n\}$ есть c_6.

Ответ. 6.

18. Арифметическая прогрессия

Пример 1. Найдем двадцатый член арифметической прогрессии 1,2; 3,3; ... .

Решение. Сначала найдем разность арифметической прогрессии: $d = a_2 - a_1 = 3{,}3 - 1{,}2 = 2{,}1$. Теперь найдем двадцатый член арифметической прогрессии: $a_{20} = a_1 + 19d = 1{,}2 + 19 \cdot 2{,}1 = 41{,}1$.

Ответ. 41,1.

Пример 2. Докажем формулу для выражения разности d арифметической прогрессии $\{a_n\}$ через два ее различных члена a_m и a_n:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}. \qquad (1)$$

Доказательство. Так как $a_m - a_n = a_1 + (m - 1)d - a_1 - (n - 1)d = (m - n)d$, то $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$, что и требовалось доказать.

Пример 3. Двадцать пятый член арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равен 3, а тридцатый член равен 2,5. Найдем первый член и разность этой арифметической прогрессии.

Решение. Сначала по формуле (1) найдем разность арифметической прогрессии: $d = \frac{a_{30} - a_{25}}{30 - 25} = \frac{2,5 - 3}{5} = -0,1$. Затем найдем первый член арифметической прогрессии, используя формулу $a_{25} = a_1 + 24d$:

$$a_1 = a_{25} - 24d = 3 - 24 \cdot (-0,1) = 5,4.$$

Ответ. $a_1 = 5,4$, $d = -0,1$.

Пример 4. Найдем сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии $-3,1$; $-3,5$; ... .

Решение. Сначала найдем разность арифметической прогрессии $\{a_n\}$:

$$d = a_2 - a_1 = -3,5 - (-3,1) = -0,4.$$

Теперь по формуле $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ суммы первых n членов арифметической прогрессии найдем сумму первых двадцати членов:

$$S_{20} = \frac{2 \cdot (-3,1) + 19 \cdot (-0,4)}{2} \cdot 20 = -138.$$

Ответ. $S_{20} = -138$.

Пример 5. Сколько первых членов арифметической прогрессии -10; -8; -6; ... нужно сложить, чтобы получить в сумме -28?

Решение. Сначала найдем разность арифметической прогрессии: $d = a_2 - a_1 = -8 - (-10) = 2$. Затем найдем значения n, для которых верно равенство $S_n = -28$. Так как

$$S_n = \frac{2 \cdot (-10) + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = n^2 - 11n,$$

то надо решить уравнение $n^2 - 11n = -28$. Это уравнение имеет два корня $n_1 = 4$ и $n_2 = 7$, значит, задача имеет два решения: нужно сложить либо первых 4 члена, либо первых 7 членов.

Ответ. 4 или 7.

19. Геометрическая прогрессия

Пример 1. Найдем пятый член геометрической прогрессии $\frac{1}{27}$; $-\frac{1}{18}$; ... .

Решение. Сначала найдем знаменатель геометрической прогрессии $\{a_n\}$: $q = a_2 : a_1 = -\frac{1}{18} : \frac{1}{27} = -\frac{3}{2}$.

Теперь найдем пятый член этой прогрессии:

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = \frac{1}{27} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}.$$

Ответ. $\frac{3}{16}$.

Пример 2. Четвертый член геометрической прогрессии с положительными членами равен 3, а шестой член равен $\frac{3}{4}$. Найдем третий член этой прогрессии.

Решение. Сначала выразим через первый член и знаменатель q известные члены геометрической прогрессии $\{b_n\}$: $b_4 = b_1q^3$; $b_6 = b_1q^5$. Откуда $b_6 : b_4 = b_1q^5 : (b_1q^3) = q^2$. Но $b_6 : b_4 = \frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4}$, поэтому $q^2 = \frac{1}{4}$.

Уравнение $q^2 = \frac{1}{4}$ имеет два корня $q_1 = \frac{1}{2}$ и $q_2 = -\frac{1}{2}$, но так как дана прогрессия с положительными членами, то q_1 удовлетворяет условию задачи, а q_2 нет.

Так как $q = \frac{1}{2}$, то $b_3 = b_4 : q = 3 : \frac{1}{2} = 6$.

Ответ. 6.

Пример 3. Найдем знаменатель геометрической прогрессии, для которой отношение суммы первых трех членов прогрессии к сумме первых двух членов равно 1,5.

Решение. Выразим через знаменатель q отношение суммы первых трех членов к сумме первых двух членов геометрической прогрессии $\{x_n\}$:

$$\frac{x_1 + x_1q + x_1q^2}{x_1 + x_1q} = \frac{x_1(1 + q + q^2)}{x_1(1 + q)} = \frac{1 + q + q^2}{1 + q} = 1{,}5.$$

Решив уравнение $\frac{1 + q + q^2}{1 + q} = 1{,}5$, получим два его корня $q_1 = 1$ и $q_2 = -\frac{1}{2}$. Следовательно, искомый знаменатель геометрической прогрессии равен 1 или $-\frac{1}{2}$.

Ответ. 1 или $-\frac{1}{2}$.

Пример 4. Первый член геометрической прогрессии равен 36, а знаменатель равен $-\frac{2}{3}$. Найдем сумму первых пяти членов этой прогрессии.

Решение. По формуле $S_n = \frac{c_1(1-q^n)}{1-q}$ суммы первых n членов геометрической прогрессии $\{c_n\}$ найдем сумму первых пяти членов этой прогрессии:

$$S_5 = \frac{36 \cdot \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^5\right)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{220}{9}.$$

Ответ. $\frac{220}{9}$.

20*. Задачи на прогрессии

Пример 1. а) Сумма пятнадцатого и двадцать седьмого членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна 2008. Найдем двадцать первый член этой прогрессии.

б) Произведение шестого и двадцатого членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равно 25. Найдем тринадцатый член этой прогрессии.

Решение. а) Так как $a_{15} + a_{27} = (a_1 + 14d) + (a_1 + 26d) = 2(a_1 + 20d) = 2a_{21}$, то из равенства $2a_{21} = 2008$ найдем, что $a_{21} = 1004$.

б) Так как $b_6 \cdot b_{20} = b_1 \cdot q^5 \cdot b_1 \cdot q^{19} = (b_1 \cdot q^{12})^2 = (b_{13})^2$, то из равенства $(b_{13})^2 = 25$ найдем, что либо $b_{13} = 5$, либо $b_{13} = -5$.

Ответ. а) 1004; б) 5 или −5.

Пример 2. а) Сумма первого и девятого членов убывающей арифметической прогрессии $\{x_n\}$ равна 10, а произведение четвертого и шестого членов этой прогрессии равно 21. Найдем первый член этой прогрессии.

б) Сумма второго и четвертого членов возрастающей геометрической прогрессии $\{y_n\}$ равна 30, а произведение первого и пятого членов этой прогрессии равно 144. Найдем первый член этой прогрессии.

Решение. а) Так как для арифметической прогрессии $\{x_n\}$ справедливы равенства $x_1 + x_9 = x_1 + x_1 + 8d = (x_1 + 3d) + (x_1 + 5d) = x_4 + x_6$, то из условия задачи следует, что пара чисел x_4 и x_6 является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_4 + x_6 = 10, \\ x_4 \cdot x_6 = 21. \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) имеет два решения: $x_4 = 7$, $x_6 = 3$ и $x_4 = 3$, $x_6 = 7$. Так как прогрессия убывающая, то условию задачи удовлетворяют лишь $x_4 = 7$, $x_6 = 3$. Тогда $d = \frac{x_4 - x_6}{4 - 6} =$

$= \frac{7 - 3}{-2} = -2$ и $x_1 = x_4 - 3d = 7 - 3 \cdot (-2) = 13$.

б) Так как для геометрической прогрессии $\{y_n\}$ справедливы равенства $y_1 \cdot y_5 = y_1 \cdot y_1 \cdot q^4 = (y_1 \cdot q) \cdot (y_1 \cdot q^3) = y_2 \cdot y_4$, то из условия задачи следует, что пара чисел y_2 и y_4 является решением системы уравнений

$$\begin{cases} y_2 + y_4 = 30, \\ y_2 \cdot y_4 = 144. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) имеет два решения: $y_2 = 24$, $y_4 = 6$ или $y_2 = 6$, $y_4 = 24$. Так как прогрессия возрастающая, то условию задачи удовлетворяют лишь $y_2 = 6$, $y_4 = 24$. Тогда $y_4 : y_2 = 24 : 6 = 4$, но $y_4 : y_2 = q^2$. Поэтому q удовлетворяет уравнению $q^2 = 4$. Следовательно, либо $q = -2$, либо $q = 2$. Но геометрическая прогрессия со знаменателем $q = -2$ не является возрастающей, поэтому условию задачи удовлетворяет лишь $q = 2$.

Итак, $y_1 = y_2 : q = 6 : 2 = 3$.

Ответ. а) 13; б) 3.

Пример 3. Между числами 9 и $-27\sqrt{3}$ нужно вставить два числа так, чтобы все четыре числа составили геометрическую прогрессию. Найдем эти числа.

Решение. Пусть числа 9, x, y, $-27\sqrt{3}$ в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Тогда верны равенства $q = \frac{x}{9} = \frac{y}{x} = \frac{-27\sqrt{3}}{y}$.

Это означает, что пара чисел x и y является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{9} = \frac{y}{x}, \\ \frac{y}{x} = \frac{-27\sqrt{3}}{y}. \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) имеет единственное решение $x = -9\sqrt{3}$, $y = 27$, следовательно, искомые числа есть $-9\sqrt{3}$ и 27.

Ответ. $-9\sqrt{3}$ и 27.

Пример 4. Три числа $x + 10$, $\sqrt{6x}$, $x - 3$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Найдем x.

Решение. Вычислив знаменатель q геометрической прогрессии двумя способами, получим уравнение для нахождения x:

$$\frac{\sqrt{6x}}{x+10} = \frac{x-3}{\sqrt{6x}}. \qquad (4)$$

Перенеся все члены уравнения (4) в одну часть, перепишем его в виде

$$\frac{(x-3)(x+10)-6x}{\sqrt{6x}(x+10)} = 0. \qquad (5)$$

Уравнение $(x - 3)(x + 10) - 6x = 0$ имеет два корня: $x_1 = -6$ и $x_2 = 5$. При $x = -6$ не имеет смысла знаменатель дроби в уравнении (5), а при $x = 5$ знаменатель этой дроби имеет смысл и отличен от нуля. Следовательно, уравнение (5) имеет единственный корень x_2, поэтому искомое число есть 5.

Ответ. 5.

21*. Градусная и радианная меры угла

Пример 1. Найдем радианные меры углов α и β, если известны их градусные меры: $\alpha = 40°$, $\beta = 15°$.

Решение. Так как развернутый угол содержит 180° или π радиан, то $1° = \frac{\pi}{180}$ радиан. Поэтому

$$\alpha = 40° = 40 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{9} \text{ радиан,}$$

$$\beta = 15° = 15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12} \text{ радиан.}$$

Ответ. $\alpha = \frac{2\pi}{9}$ радиан, $\beta = \frac{\pi}{12}$ радиан.

Пример 2. Найдем градусные меры углов α и β, если известны их радианные меры: $\alpha = \frac{7\pi}{12}$ радиан, $\beta = \frac{5\pi}{8}$ радиан.

Решение. Так как развернутый угол содержит π радиан или 180°, то 1 радиан $= \frac{180°}{\pi}$. Поэтому

$$\alpha = \frac{7\pi}{12} \text{ радиан} = \frac{7\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 105^\circ,$$

$$\beta = \frac{5\pi}{8} \text{ радиан} = \frac{5\pi}{8} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 112{,}5^\circ.$$

Ответ. $\alpha = 105^\circ$, $\beta = 112{,}5^\circ$.

22*. Координаты некоторых точек единичной окружности

Пример 1. Определим координаты точек B и C и градусную меру углов α и β, если точки B и C, соответствующие углам α и β, лежат на пересечении:

а) осей координат с единичной окружностью (рис. 60, *а*);

б) биссектрис I и IV координатных углов с единичной окружностью (рис. 60, *б*).

Решение. а) Точка B лежит на оси Ox и на окружности радиуса 1, поэтому B $(-1; 0)$. Точка C лежит на оси Oy и на окружности радиуса 1, поэтому C $(0; -1)$. Так как углы α и β заключены в промежутке от 0° до 360°, то на рисунке 60, *а* изображены углы $\alpha = 180^\circ$ и $\beta = 270^\circ$.

б) Угол α составляет половину прямого угла, поэтому на рисунке 60, *б* изображен угол $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$. Ординаты точек B и C равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответственно, абсциссы этих точек равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ. а) B $(-1; 0)$, C $(0; -1)$; $\alpha = 180^\circ$, $\beta = 270^\circ$; б) B $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, C $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 315^\circ$.

Пример 2. Определим координаты точек B и C и радианную меру углов α и β, если точки B и C, соответствующие углам α и β, лежат на пересечении прямой $y = \frac{1}{2}$ с единичной окружностью (рис. 60, *в*).

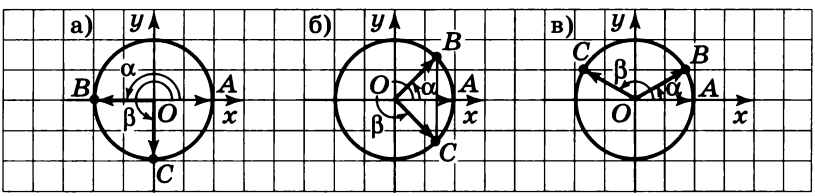

Рис. 60

Решение. На рисунке 60, *в* ординаты точек B и C равны $\frac{1}{2}$, тогда абсциссы этих точек $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ соответственно и $\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ. $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$.

23*. Синус и косинус угла

Пример 1. Определим синус и косинус острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 61).

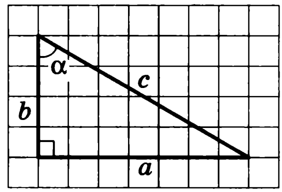

Рис. 61

Решение. Из курса геометрии известно, что синус острого угла прямоугольного треугольника есть отношение противолежащего катета к гипотенузе, косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе, поэтому $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Ответ. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Пример 2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α, β, γ и φ (рис. 62). Определим синус и косинус каждого из этих углов.

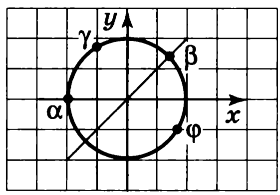

Рис. 62

Решение. Так как по определению синус и косинус угла есть соответственно ордината и абсцисса точки единичной окружности, соответствующей этому углу, то $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -1$; $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$; $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (вычисление координат точек единичной окружности см. в п. 22).

Пример 3. Изобразим на единичной окружности точки, соответствующие всем таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\sin\alpha = 0$; б) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos\alpha = 0$; г) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. а) Всем углам α, для которых $\sin\alpha = 0$, соответствуют две точки единичной окружности, имеющие ординату 0 (рис. 63, *а*).

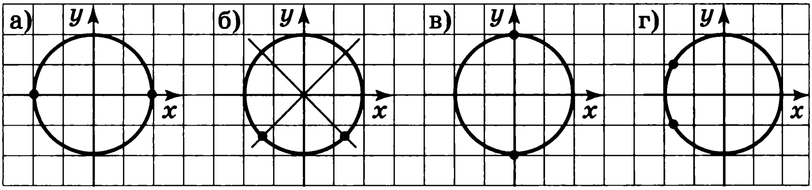

Рис. 63

б) Всем углам α, для которых $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, соответствуют две точки единичной окружности, полученные на пересечении биссектрис координатных углов и единичной окружности и имеющие ординату $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 63, *б*).

в) Всем углам α, для которых $\cos\alpha = 0$, соответствуют две точки единичной окружности, имеющие абсциссу 0 (рис. 63, *в*).

г) Всем углам α, для которых $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, соответствуют две точки единичной окружности, имеющие ординаты $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ и абсциссу $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 63, *г*).

24*. Формулы для синуса и косинуса угла

Для любого угла α справедливы формулы:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad (1)$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad (2)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad (3)$$
$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha, \quad (4)$$
$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha, \quad (5)$$
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \quad (6)$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \quad (7)$$

где k — любое целое число.

Пример 1. Вычислим $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $90° < \alpha < 180°$.

Решение. По формуле (1) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$. Так как $90° < \alpha < 180°$, то $\cos\alpha < 0$, следовательно, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$.

Ответ. $-\frac{12}{13}$.

Пример 2. Докажем, что для любого угла α справедливо равенство

$$\sin(5\pi - \alpha) = \sin\alpha.$$

Решение. По формуле (4)

$$\sin(5\pi - \alpha) = \sin((\pi - \alpha) + 4\pi) = \sin(\pi - \alpha).$$

По формулам (6) и (2)

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\pi + (-\alpha)) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Вычислим $A = \frac{2\cos\alpha - 2\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}$, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Решение. Пользуясь формулой (1), имеем

$$A = \frac{2\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{2\cos\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 2\cos\alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ответ. $\frac{2}{3}$.

25*. Тангенс и котангенс угла

Пример 1. Определим тангенс и котангенс острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 64).

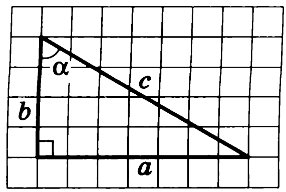

Рис. 64

Решение. Из курса геометрии известно, что тангенс острого угла прямоугольного треугольника есть отношение противолежащего катета к прилежащему, а котангенс — отношение прилежащего катета к противолежащему, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Основные формулы для тангенсов и котангенсов углов:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad (5)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha, \qquad (6)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad (7)$$

где k — любое целое число и каждое из равенств (1) – (7) справедливо для всех таких углов α, для каждого из которых имеют смысл обе части этих равенств.

Пример 2. Вычислим:

а) $\operatorname{tg} 45°$; б) $\operatorname{ctg} 420°$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

Решение. а) Из формулы (1) имеем

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\cos 45°}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

б) Из формул (2) и (6) имеем

$$\operatorname{ctg} 420° = \operatorname{ctg}(420° - 2 \cdot 180°) =$$

$$= \operatorname{ctg} 60° = \frac{\cos 60°}{\sin 60°} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

в) Из формул (1) и (3) имеем

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} : \cos\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

г) Из формулы (2) имеем

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} : \sin\frac{\pi}{2} = 0 : 1 = 0.$$

Ответ. а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) 0.

Пример 3. Докажем равенство:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; (8)

б) $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$. (9)

Доказательство. а) $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, что и требовалось доказать.

б) $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1 = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, что и требовалось доказать.

Пример 4. Вычислим $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$ и $180° < \alpha < 270°$.

Решение. Из формулы (7) имеем

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2{,}4} = \frac{5}{12}.$$

Из формулы (8) имеем

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \frac{1}{2{,}4^2 + 1} = \frac{1}{6{,}76} = \frac{25}{169}.$$

Так как $180° < \alpha < 270°$, то $\cos\alpha < 0$ и $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$.

Из формулы (1) следует, что $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}$.

Ответ. $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$.

Пример 5. Вычислим $A = \frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\sin\alpha + 2\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

Решение. Преобразуем выражение A, разделив числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$:

$$A = \frac{\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha} - 2}{\frac{5\sin\alpha}{\cos\alpha} + 2} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - 2}{5\operatorname{tg}\alpha + 2}.$$

Если $\operatorname{tg}\alpha = -3$, то $A = \frac{3 \cdot (-3) - 2}{5 \cdot (-3) + 2} = \frac{11}{13}$.

Ответ. $\frac{11}{13}$.

26*. Косинус суммы и косинус разности двух углов. Синус суммы и синус разности двух углов

Для любых углов α и β справедливы формулы:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad (2)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha, \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha. \qquad (4)$$

Пример 1. Вычислим:

а) $A = \cos 37° \cos 53° - \sin 37° \sin 53°$;

б) $B = \sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

Решение. а) По формуле (2)

$$A = \cos(37° + 53°) = \cos 90° = 0.$$

б) По формуле (3) $B = \sin\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Ответ. а) 0; б) $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Упростим выражение

$$C = \cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta).$$

Решение. По формуле (1)

$$C = \cos((\alpha - \beta) - (\alpha + \beta)) = \cos(-2\beta) = \cos 2\beta.$$

Ответ. $\cos 2\beta$.

Пример 3. Вычислим $D = \dfrac{\sin 43^\circ \cos 17^\circ + \sin 17^\circ \cos 43^\circ}{\cos 72^\circ \cos 12^\circ + \sin 72^\circ \sin 12^\circ}$.

Решение. По формулам (1) и (4)

$$D = \frac{\sin(43^\circ + 17^\circ)}{\cos(72^\circ - 12^\circ)} = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \mathrm{tg}\, 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Ответ. $\sqrt{3}$.

Пример 4. Сравним

$A = \dfrac{\sin 47^\circ \cos 69^\circ + \sin 69^\circ \cos 47^\circ}{\cos 77^\circ \cos 39^\circ - \sin 77^\circ \sin 39^\circ}$ и $B = \dfrac{\sin 42^\circ + \cos 42^\circ}{\cos 21^\circ - \sin 21^\circ}$.

Решение. Преобразуем выражение A:

$$A = \frac{\sin(47^\circ + 69^\circ)}{\cos(77^\circ + 39^\circ)} = \frac{\sin 116^\circ}{\cos 116^\circ} = \mathrm{tg}\, 116^\circ.$$

Имеем $A < 0$.

Так как $\sin 42^\circ > 0$ и $\cos 42^\circ > 0$, то $\sin 42^\circ + \cos 42^\circ > 0$. Для углов из промежутка $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ справедливо неравенство $\cos\alpha > \sin\alpha$, значит, $\cos 21^\circ - \sin 21^\circ > 0$. Получаем, что $B > 0$.

Итак, $A < 0$, $B > 0$, следовательно, $A < B$.

Ответ. $A < B$.

27*. Формулы приведения для синуса и косинуса

Формулами приведения называют формулы, позволяющие привести аргументы $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, $\frac{3\pi}{2} + \alpha$, $2\pi - \alpha$, $2\pi + \alpha$, $\frac{5\pi}{2} - \alpha$, $\frac{5\pi}{2} + \alpha$, $3\pi - \alpha$, $3\pi + \alpha$, ... к аргументу α.

Так как значения синуса и косинуса не изменяются от прибавления (вычитания) 2π к аргументу, то синус (косинус) любого из указанных выше аргументов нетрудно свести к синусу (косинусу) аргументов $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, $\frac{3\pi}{2} + \alpha$, которые можно привести к аргументу α, применяя формулы синуса (косинуса) суммы (разности) двух углов.

Выпишем все 12 формул для указанных выше шести аргументов:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha.$$

Все эти формулы можно запомнить с помощью мнемонического правила[1]. Для этого надо научиться определять: 1) надо ли менять синус на косинус или косинус на синус; 2) надо ли в правой части формулы ставить знак «–».

1) Если первое слагаемое аргумента $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то в правой части формулы надо заменить синус на косинус (косинус на синус). Если первое слагаемое аргумента π, то менять синус (косинус) не надо.

2) В правой части формулы надо поставить знак «–», только если для острого угла α значение синуса (косинуса) в левой части формулы отрицательно.

Пример 1. Вычислим $A=\cos\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(-5\pi-\alpha)$, если $\sin\alpha=-0{,}1$.

Решение. $A=\cos\left(4\pi+\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(-6\pi+\pi-\alpha)=$
$=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)$.

Теперь можно применить формулы косинуса суммы и синуса разности двух углов:

$A=\cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha+\sin\pi\cos\alpha-\sin\alpha\cos\pi=$
$=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha+0\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot(-1)=\sin\alpha+\sin\alpha=$
$=2\sin\alpha$.

Тот же результат можно получить с помощью мнемонического правила:

$$A=\sin\alpha+\sin\alpha=2\sin\alpha.$$

---

[1] Название правила происходит от греческого слова mnêmonikon (μνέμονίκον), означающего искусство запоминания.

Так как $\sin\alpha = -0{,}1$, то $2\sin\alpha = 2\cdot(-0{,}1) = -0{,}2$.
Ответ. $-0{,}2$.

Пример 2. Вычислим $\dfrac{2\sin(\pi+\alpha)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)-4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

Решение. $\dfrac{2\sin(\pi+\alpha)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)-4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \dfrac{-2\sin\alpha-\cos\alpha}{-\cos\alpha+4\sin\alpha}$.

Так как $\operatorname{tg}\alpha = 3$, то $\cos\alpha \neq 0$. Разделим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{-2\sin\alpha-\cos\alpha}{-\cos\alpha+4\sin\alpha}$ на $\cos\alpha$ и вычислим значение полученного выражения:

$$\frac{-2\sin\alpha-\cos\alpha}{-\cos\alpha+4\sin\alpha} = \frac{-2\operatorname{tg}\alpha-1}{-1+4\operatorname{tg}\alpha} = \frac{-6-1}{-1+12} = -\frac{7}{11}.$$

Ответ. $-\dfrac{7}{11}$.

28*. Сумма и разность синусов и косинусов

Для любых углов α и β справедливы формулы:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (1)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad (2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (4)$$

Пример 1. Запишем в виде произведения:
а) $A = \sin 80^\circ + \sin 40^\circ$; б) $B = \cos 80^\circ - \cos 40^\circ$.
Решение. а) По формуле (1)

$$A = 2\sin\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\cos\frac{80^\circ-40^\circ}{2} = 2\sin 60^\circ\cos 20^\circ =$$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ = \sqrt{3}\cos 20^\circ.$$

б) По формуле (4)

$$B = -2\sin\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\sin\frac{80^\circ-40^\circ}{2} = -2\sin 60^\circ\sin 20^\circ =$$

$$= -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ = -\sqrt{3}\sin 20^\circ.$$

Ответ. а) $\sqrt{3}\cos 20^\circ$; б) $-\sqrt{3}\sin 20^\circ$.

Пример 2. Вычислим

$$C = \sin 130° - \sin 10° - \cos 100° - \cos 40°.$$

Решение. По формулам (2) и (3)

$$C = 2\sin\frac{130° - 10°}{2}\cos\frac{130° + 10°}{2} - 2\cos\frac{100° + 40°}{2}\cos\frac{100° - 40°}{2} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2}\cos 70° - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2}\cos 70° = 0.$$

Ответ. 0.

Пример 3. Запишем в виде произведения

$$D = \sin 31° + \sin 25° + \sin 19°.$$

Решение. По формулам (1) и (3)

$$D = 2\sin\frac{31° + 19°}{2}\cos\frac{31° - 19°}{2} + \sin 25° = 2\sin 25°\cos 6° +$$

$$+ \sin 25° = 2\sin 25°\left(\cos 6° + \frac{1}{2}\right) = 2\sin 25°(\cos 6° + \cos 60°) =$$

$$= 2\sin 25° \cdot 2\cos\frac{6° + 60°}{2}\cos\frac{6° - 60°}{2} = 4\sin 25° \cdot \cos 33° \cdot \cos 27°.$$

Ответ. $4\sin 25° \cdot \cos 33° \cdot \cos 27°$.

29*. Формулы для двойных и половинных углов

Для любого угла α справедливы формулы:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad (2)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Пример 1. Вычислим $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества получаем, что $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$. Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha < 0$, поэтому $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$. По формулам (1) и (2) имеем $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$,

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$.

Ответ. $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$.

Пример 2. Докажем справедливость равенства

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$$

для углов $\alpha \neq \pi n$, где n — любое целое число.

Решение. Запишем $\sin 2\alpha$ в виде дроби, затем разделим числитель и знаменатель дроби на $\sin^2\alpha$, так как $\sin^2\alpha \neq 0$ для $\alpha \neq \pi n$, где n — любое целое число:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha},$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Вычислим $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -0{,}28$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. По формулам (3) и (4)

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1+0{,}28}{2} = 0{,}64,$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1-0{,}28}{2} = 0{,}36.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$, поэтому $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, а $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, следовательно, $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$, а $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6$.

Ответ. $\sin\frac{\alpha}{2} = 0{,}8$, $\cos\frac{\alpha}{2} = -0{,}6$.

30*. Произведения синусов и косинусов

Для любых углов α и β справедливы формулы:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)), \qquad (1)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)), \qquad (2)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)). \qquad (3)$$

Пример 1. Запишем в виде суммы или разности:

а) $\sin 21^\circ \cos 9^\circ$; б) $\cos 32^\circ \cos 28^\circ$; в) $\sin 55^\circ \sin 25^\circ$.

Решение. Применяя последовательно формулы (1) – (3), имеем:

а) $\sin 21^\circ \cos 9^\circ = \frac{1}{2}(\sin 30^\circ + \sin 12^\circ) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin 12^\circ$;

б) $\cos 32° \cos 28° = \frac{1}{2}(\cos 60° + \cos 4°) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 4°;$

в) $\sin 55° \sin 25° = \frac{1}{2}(\cos 30° - \cos 80°) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\cos 80°.$

Ответ. а) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin 12°$; б) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 4°$; в) $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\cos 80°$.

Пример 2. Вычислим:
а) $A = \sin 32°\cos 28° - \sin 17°\cos 13°$;
б) $B = \cos\frac{3\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16} - \sin\frac{7\pi}{16}\sin\frac{5\pi}{16}$.

Решение. а) По формуле (1)

$$A = \frac{1}{2}(\sin 60° + \sin 4°) - \frac{1}{2}(\sin 30° + \sin 4°) =$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 60° + \sin 4° - \sin 30° - \sin 4°) = \frac{1}{2}(\sin 60° - \sin 30°) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

б) По формулам (2) и (3)

$$B = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{16}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{16} - \frac{\pi}{16}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{16} - \frac{5\pi}{16}\right) -\right.$$

$$\left.- \cos\left(\frac{7\pi}{16} + \frac{5\pi}{16}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Ответ. а) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$; б) 0.

31. Абсолютная и относительная погрешности

Пример 1. Найдем приближение числа 0,041953 с точностью:
а) до второго разряда после запятой с недостатком;
б) до третьего разряда после запятой с избытком;
в) до четвертого разряда после запятой с округлением.

Решение. а) $0{,}041953 \approx 0{,}04$;
б) $0{,}041953 \approx 0{,}042$;
в) $0{,}041953 \approx 0{,}0420$.

Пример 2. Округлим число 0,041953 с точностью:
а) до двух значащих цифр;
б) до трех значащих цифр;
в) до четырех значащих цифр.

Решение. а) $0{,}041953 \approx 0{,}042$;
б) $0{,}041953 \approx 0{,}0420$;
в) $0{,}041953 \approx 0{,}04195$.

Пример 3. Найдем абсолютную погрешность приближения:

а) $3{,}1415926 \approx 3{,}14$; б) $0{,}00497 \approx 0{,}005$;
в) $4{,}691 \cdot 10^6 \approx 5 \cdot 10^6$; г) $8{,}346 \cdot 10^{-6} \approx 8{,}3 \cdot 10^{-6}$.

Решение.

а) $|3{,}1415926 - 3{,}14| = |0{,}0015926| = 0{,}0015926$;

б) $|0{,}00497 - 0{,}005| = |-0{,}00003| = 0{,}00003$;

в) $|4{,}691 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^6| = |4{,}691 - 5| \cdot 10^6 = |-0{,}309| \cdot 10^6 = 0{,}309 \cdot 10^6 = 3{,}09 \cdot 10^5$;

г) $|8{,}346 \cdot 10^{-6} - 8{,}3 \cdot 10^{-6}| = |8{,}346 - 8{,}3| \cdot 10^{-6} = |0{,}046| \cdot 10^{-6} = 0{,}046 \cdot 10^{-6} = 4{,}6 \cdot 10^{-8}$.

Правила оценки относительных погрешностей:

1. Если заменить положительное число его приближением с точностью до k-й значащей цифры **с недостатком,** то относительная погрешность приближения не превышает $10^{-(k-1)}$.

2. Если заменить положительное число его приближением с точностью до k-й значащей цифры **с округлением,** то относительная погрешность приближения не превышает $\frac{1}{2} \cdot 10^{-(k-1)}$.

Пример 4. Оценим относительную погрешность приближения:

а) $5{,}888 \approx 5{,}8$; б) $5{,}888 \approx 5{,}89$.

Решение. а) 5,8 — это приближение числа 5,888 с недостатком (без округления) с точностью до второй значащей цифры, поэтому по правилу 1 относительная погрешность приближения $\frac{|5{,}888 - 5{,}8|}{|5{,}888|}$ не превышает $10^{-(2-1)} = 0{,}1$, т. е. $\frac{|5{,}888 - 5{,}8|}{|5{,}888|} \leqslant 0{,}1$.

б) 5,89 — это приближение числа 5,888 с округлением с точностью до третьей значащей цифры, поэтому по правилу 2 относительная погрешность приближения $\frac{|5{,}888 - 5{,}89|}{|5{,}888|}$ не превышает $\frac{1}{2} \cdot 10^{-(3-1)} = 0{,}005$, т. е. $\frac{|5{,}888 - 5{,}89|}{|5{,}888|} \leqslant 0{,}005$.

32*. Приближения суммы, разности, произведения и частного чисел

При оценке суммы, разности, произведения и частного чисел пользуются следующими правилами:

1. Абсолютная погрешность приближения суммы или разности двух чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей приближений этих чисел.

$$\left|(a+b)-(\bar{a}+\bar{b})\right| \leqslant \left|a-\bar{a}\right|+\left|b-\bar{b}\right|;$$

$$\left|(a-b)-(\bar{a}-\bar{b})\right| \leqslant \left|a-\bar{a}\right|+\left|b-\bar{b}\right|.$$

2. Абсолютная погрешность приближения суммы конечного числа слагаемых не превышает суммы абсолютных погрешностей приближений этих слагаемых.

$$\left|(a+b+\ldots+z)-(\bar{a}+\bar{b}+\ldots+\bar{z})\right| \leqslant \left|a-\bar{a}\right|+\left|b-\bar{b}\right|+\ldots+\left|z-\bar{z}\right|.$$

3. Относительная погрешность приближения произведения или частного чисел не превышает суммы относительных погрешностей приближений этих чисел.

$$\left|\frac{ab-\bar{a}\bar{b}}{ab}\right| \leqslant \left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right|+\left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|;$$

$$\left|\frac{\frac{a}{b}-\frac{\bar{a}}{\bar{b}}}{\frac{a}{b}}\right| \leqslant \left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right|+\left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|.$$

Пример 1. Оценим абсолютную погрешность приближенного равенства:

а) $13{,}954 + 7{,}3297 \approx 13{,}9 + 7{,}3$;

б) $0{,}34574 - 0{,}03157 \approx 0{,}35 - 0{,}03$.

Решение. а) Абсолютные погрешности приближений первого и второго слагаемых не превосходят соответственно 0,1 и 0,05. Следовательно, абсолютная погрешность приближенного равенства не превосходит $0{,}1 + 0{,}05 \leqslant 0{,}2$ (по правилу 1).

б) Абсолютные погрешности приближений и уменьшаемого, и вычитаемого не превосходят 0,005. Следовательно, абсолютная погрешность приближенного равенства не превосходит $0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}01$ (по правилу 1).

Ответ. а) 0,2; б) 0,01.

Пример 2. Оценим абсолютную погрешность приближенного равенства:

а) $13{,}954 + 7{,}3397 + 15{,}856 + 2{,}382 \approx 13{,}9 + 7{,}3 + 15{,}8 + 2{,}3$;

б) $13{,}954 + 7{,}3397 + 15{,}856 + 2{,}382 \approx 14{,}0 + 7{,}3 + 15{,}9 + 2{,}4$.

Решение. а) Абсолютные погрешности приближений слагаемых не превосходят соответственно 0,1, 0,05, 0,1 и 0,05. Следовательно, абсолютная погрешность приближенного равенства не превосходит $0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}05 = 0{,}3$ (по правилу 2).

б) Абсолютные погрешности приближений каждого из слагаемых не превосходят 0,05. Следовательно, абсолютная погрешность приближенного равенства не превосходит $0{,}05 \cdot 4 = 0{,}2$ (по правилу 2).

Пример 3. Оценим относительную погрешность приближения:

а) $12,(73) \cdot \pi \approx 12{,}7 \cdot 3{,}14$;

б) $4,(85) : 19,(28) \approx 4{,}86 : 19{,}3$.

Решение. а) Мы взяли приближения множителей с тремя значащими цифрами с округлением:

$$12,(73) \approx 12{,}7373... \approx 12{,}7; \ \pi \approx 3{,}1415... \approx 3{,}14,$$

тогда относительная погрешность приближения каждого множителя не превосходит $\frac{1}{2} \cdot 10^{-(3-1)} = 0{,}005$, а относительная погрешность приближения произведения $12,(73) \cdot \pi \approx$ $\approx 12{,}7 \cdot 3{,}14$ не превосходит $0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}01$ (по правилу 3). Если округлим произведение $12{,}7 \cdot 3{,}14 = 39{,}878 \approx$ $\approx 39{,}9$ с тремя значащими цифрами, то относительная погрешность этого приближения не превысит 0,005. Поэтому относительная погрешность приближения $12,(73) \cdot \pi \approx 39{,}9$ увеличится на 0,005 и составит 0,01.

б) Мы взяли приближения делимого и делителя с тремя значащими цифрами с округлением:

$$4,(85) = 4{,}8585... \approx 4{,}86; \ 19,(28) \approx 19{,}2828... \approx 19{,}3,$$

тогда относительная погрешность приближения каждого числа не превосходит $\frac{1}{2} \cdot 10^{-(3-1)} = 0{,}005$, а относительная погрешность приближения частного $4,(85) : 19,(28) \approx 4{,}86 :$ $: 19{,}3$ не превосходит $0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}01$. Округлим частное $4{,}86 : 19{,}3 = 0{,}2518... \approx 0{,}252$ с тремя значащими цифрами. Относительная погрешность этого приближения не превосходит 0,005, поэтому относительная погрешность приближения $4{,}86 : 19{,}3 \approx 0{,}252$ увеличится на 0,005 и составит 0,015.

Самостоятельные работы

С–1 Линейные неравенства с одним неизвестным

I вариант

1. Решите неравенство:
 а) $6x - 2 < 2x + 6$; б) $x - 14 < 3(x + 2)$;
 в) $5(6x + 1) > 2(15x + 3) - 7$; г) $4(x - 9) > 3(x + 3) + x$.
2. Решите неравенство:
 а) $(\sqrt{3} + 1)x > 4 + 2\sqrt{3}$ и укажите его наименьшее целое решение;
 б) $\frac{x-3}{2} - \frac{3x-2}{5} < \frac{-3x+6}{10}$ и укажите его наибольшее целое решение.
3. Найдите наибольшее целое значение x, при котором разность дробей $\frac{11-x}{8}$ и $\frac{12-x}{4}$ отрицательна.

II вариант

1. Решите неравенство:
 а) $5x - 4 < 2x + 5$; б) $x - 5 < 4(x - 2)$;
 в) $4(3x + 1) > 6(3x - 2) + 7$; г) $5(x - 4) > 7(x - 1) - 2x$.
2. Решите неравенство:
 а) $(\sqrt{2} + 1)x < 3 + 2\sqrt{2}$ и укажите его наибольшее целое решение;
 б) $\frac{x-5}{2} - \frac{2x-4}{3} > \frac{-2x+1}{6}$ и укажите его наименьшее целое решение.
3. Найдите наибольшее целое значение x, при котором сумма дробей $\frac{15-x}{5}$ и $\frac{3-x}{10}$ положительна.

III вариант

1. Решите неравенство:
 а) $-4x - 7 < x + 3$; б) $7x - 4 < 5(x + 4)$;
 в) $5(4x - 1) > 10(2x - 1) + 4$; г) $6(x - 9) > 8(x - 3) - 2x$.
2. Решите неравенство:
 а) $(\sqrt{7} - 3)x > 16 - 6\sqrt{7}$ и укажите его наибольшее целое решение;
 б) $\frac{x-2}{4} - \frac{5x+1}{3} < \frac{-13x+3}{12}$ и укажите его наименьшее целое решение.
3. Найдите наименьшее целое значение x, при котором сумма дробей $\frac{8-x}{6}$ и $\frac{3-x}{4}$ отрицательна.

IV вариант

1. Решите неравенство:
   а) $-5x - 3 < x + 9$; б) $8x - 2 < 6(x - 3)$;
   в) $6(6x - 5) > 4(9x - 7) - 8$; г) $7(x - 9) > 9(x - 3) - 2x$.
2. Решите неравенство:
   а) $(\sqrt{8} - 3)x < 17 - 6\sqrt{8}$ и укажите его наименьшее целое решение;
   б) $\frac{x-4}{3} - \frac{4x-7}{5} < \frac{-11x-6}{15}$ и укажите его наибольшее целое решение.
3. Найдите наименьшее целое значение x, при котором разность дробей $\frac{2-x}{5}$ и $\frac{4-x}{3}$ положительна.

С–2* Линейные неравенства с параметром

I вариант

1. При каком значении параметра a неравенство $ax > 9x + 6$ не имеет решений?
2. При каком значении параметра a решением неравенства $ax < 3x + 6$ является любое действительное число?
3. При каждом значении параметра a решите неравенство $ax + 5a < 4 - 6x$.

II вариант

1. При каком значении параметра a неравенство $ax < 8x - 7$ не имеет решений?
2. При каком значении параметра a решением неравенства $ax > 4x - 5$ является любое действительное число?
3. При каждом значении параметра a решите неравенство $ax - 6a > 5x + 3$.

III вариант

1. При каком значении параметра a неравенство $ax > 7x + 8$ не имеет решений?
2. При каком значении параметра a решением неравенства $ax < 5x + 4$ является любое действительное число?
3. При каждом значении параметра a решите неравенство $ax + 7a < 2 - 4x$.

IV вариант

1. При каком значении параметра a неравенство $ax < 6x - 9$ не имеет решений?
2. При каком значении параметра a решением неравенства $ax > 6x - 3$ является любое действительное число?
3. При каждом значении параметра a решите неравенство $ax - 8a > 3x + 1$.

С–3 Системы линейных неравенств с одним неизвестным

I вариант

Решите систему неравенств **(1 – 4)**:

1. $\begin{cases} 5x - 3 > 3x + 1, \\ 3x + 2 < -x + 13. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 11 > 5x - 4, \\ 5x + 6 < x - 2. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 7x - 9 > 5x + 1, \\ 4x - 3 < x - 6. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x - 1 > \dfrac{2x + 3}{2}, \\ \dfrac{2x + 5}{5} > x - 2. \end{cases}$

II вариант

Решите систему неравенств **(1 – 4)**:

1. $\begin{cases} 7x - 2 < 4x + 7, \\ 9x - 7 > 5x + 2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x - 5 > 7x + 3, \\ 7x - 8 > 4x + 7. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 8x - 9 > 5x + 3, \\ 7x - 1 < 5x - 5. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x - 1 > \dfrac{2x + 4}{5}, \\ \dfrac{4x + 7}{2} > 3x - 1. \end{cases}$

III вариант

Решите систему неравенств **(1 – 4)**:

1. $\begin{cases} 13x - 10 < 8x + 5, \\ 10x - 11 > 6x - 4. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x - 7 > 6x - 1, \\ 5x + 3 < 8x - 3. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 4x - 11 > -x - 1, \\ 7x - 5 < 4x + 1. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dfrac{x - 4}{5} < \dfrac{x - 2}{3}, \\ x - 1 < \dfrac{3x - 1}{7}. \end{cases}$

IV вариант

Решите систему неравенств **(1 – 4)**:

1. $\begin{cases} 12x - 9 < 7x + 11, \\ 11x - 13 > 7x - 4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x + 4 > -8x - 5, \\ 3x - 9 > 7x - 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 10 > -x + 2, \\ 8x - 7 < 3x + 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{3} < \dfrac{3x-3}{5}, \\ 2x + 1 < \dfrac{x+2}{3}. \end{cases}$

С–4* Системы линейных неравенств с параметром

I вариант

1. При каких значениях параметра a система неравенств
$$\begin{cases} 2x - 3a > 4, \\ 4x + 5a < 6 \end{cases}$$
совместна?

2. При каких значениях параметра a число 2 является решением системы неравенств $\begin{cases} 3 > 5x - a, \\ -3 < 3x + a? \end{cases}$

3. При каких значениях параметра a числа 4 и 6 являются решениями системы неравенств $\begin{cases} x - 2a < 3, \\ 2x - a > 3? \end{cases}$

II вариант

1. При каких значениях параметра a система неравенств
$$\begin{cases} 4x - 5a > 6, \\ 6x + 7a < 8 \end{cases}$$
совместна?

2. При каких значениях параметра a число 2 является решением системы неравенств $\begin{cases} 1 > 2x - 3a, \\ -7 < 2x + a? \end{cases}$

3. При каких значениях параметра a числа 3 и 5 являются решениями системы неравенств $\begin{cases} x - 2a < 6, \\ 3x - a > 8? \end{cases}$

III вариант

1. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} 3x - 4a < 5, \\ 5x + 6a > 7 \end{cases}$ несовместна?
2. При каких значениях параметра a число 3 является решением системы неравенств $\begin{cases} -3 > 4x - 2a, \\ -4 < 5x + 2a? \end{cases}$
3. При каких значениях параметра a числа 3 и 5 являются решениями системы неравенств $\begin{cases} 2x - 3a < 4, \\ 2x + a > 5? \end{cases}$

IV вариант

1. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} 5x - 6a > 7, \\ 7x + 8a < 9 \end{cases}$ несовместна?
2. При каких значениях параметра a число 3 является решением системы неравенств $\begin{cases} -5 > 3x - 4a, \\ -6 < 4x + a? \end{cases}$
3. При каких значениях параметра a числа 3 и 4 являются решениями системы неравенств $\begin{cases} 4x + 3a < 9, \\ 3x + a > 6? \end{cases}$

С–5 Неравенства второй степени

I вариант

Решите неравенство **(1 – 3)**:

1. а) $x^2 + 6x + 5 > 0$; б) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 5 < 0$.
2. а) $x^2 - 6x + 9 > 0$; б) $2x^2 + 32x + 128 < 0$.
3. а) $x^2 - 2x + \frac{3}{2} > 0$; б) $-3x^2 + 4x - 2 > 0$.

II вариант

Решите неравенство **(1 – 3)**:

1. а) $x^2 - 7x + 6 > 0$; б) $\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{10}{3} < 0$.
2. а) $x^2 + 10x + 25 > 0$; б) $3x^2 - 24x + 48 < 0$.
3. а) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} > 0$; б) $-4x^2 + 5x - 2 > 0$.

III вариант

Решите неравенство **(1 – 3)**:

1. а) $x^2 + 8x + 7 > 0$; б) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 6 < 0$.

2. а) $x^2 - 8x + 16 > 0$; б) $3x^2 + 30x + 75 < 0$.

3. а) $2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 > 0$; б) $-3x^2 + 7x - 2 > 0$.

IV вариант

Решите неравенство **(1 – 3)**:

1. а) $x^2 - 9x + 8 > 0$; б) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 4 < 0$.

2. а) $x^2 - 12x + 36 > 0$; б) $4x^2 + 24x + 36 < 0$.

3. а) $2x^2 + x + \frac{1}{3} > 0$; б) $-6x^2 + 7x - 3 > 0$.

С–6* Неравенства второй степени с параметром

I вариант

1. Для каждого значения параметра a решите неравенство
$$x^2 - (4 + 3a)x + 12a < 0.$$

2. Для каждого значения параметра a решите неравенство
$$x^2 - (3a - 2)x + 2a^2 - a - 3 > 0.$$

3. Укажите все значения параметра m, при каждом из которых любое число является решением неравенства $x^2 - 5x + m > 0$.

4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых множество решений неравенства $x^2 - (5a + 5)x + 6a^2 + 15a < 0$ содержит отрезок [1; 3].

II вариант

1. Для каждого значения параметра a решите неравенство
$$x^2 - (3 + 4a)x + 12a > 0.$$

2. Для каждого значения параметра a решите неравенство
$$x^2 - (4a - 3)x + 3a^2 - 5a + 2 < 0.$$

3. Укажите все значения параметра m, при каждом из которых любое число является решением неравенства $x^2 - 6x + m > 0$.

4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых множество решений неравенства $x^2 - (5a - 5)x + 6a^2 - 10a < 0$ содержит отрезок [1; 2].

III вариант

1. Для каждого значения параметра a решите неравенство
$$x^2 - (2 + 5a)x + 10a < 0.$$
2. Для каждого значения параметра a решите неравенство
$$x^2 - (4a + 3)x + 3a^2 + 5a + 2 > 0.$$
3. Укажите все значения параметра m, при каждом из которых любое число является решением неравенства $x^2 - mx + 25 > 0$.
4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых множество решений неравенства $x^2 - (7a - 5)x + 12a^2 - 15a < 0$ содержит отрезок $[9; 10]$.

IV вариант

1. Для каждого значения параметра a решите неравенство
$$x^2 - (5 + 2a)x + 10a > 0.$$
2. Для каждого значения параметра a решите неравенство
$$x^2 - (3a + 2)x + 2a^2 + a - 3 < 0.$$
3. Укажите все значения параметра m, при каждом из которых любое число является решением неравенства $x^2 - mx + 36 > 0$.
4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых множество решений неравенства $x^2 - (7a + 5)x + 12a^2 + 20a < 0$ содержит отрезок $[5; 8]$.

С-7 Рациональные неравенства

I вариант

Решите неравенство **(1 – 3)**:

1. а) $(x + 1)(x - 4)(3x - 6) < 0$; б) $\frac{3x+1}{x-3} > 0$.

2. а) $\frac{-19}{2x+3} < 0$; б) $\frac{x^2+4x+6}{2x-5} < 0$.

3. а) $\frac{x-3}{x-4} > \frac{x-4}{x-3}$; б) $(x - 3)(x^2 - 2x + 8) > (x - 3)(x^2 + x - 4)$.

II вариант

Решите неравенство **(1 – 3)**:

1. а) $(x + 2)(x - 3)(2x - 2) > 0$; б) $\frac{3x-1}{x+3} > 0$.

2. а) $\frac{-51}{4x+5} > 0$; б) $\frac{x^2-6x+11}{3x-2} < 0$.

3. а) $\frac{x-2}{x-3} > \frac{x-3}{x-2}$; б) $(x - 2)(x^2 - 3x + 7) > (x - 2)(x^2 + x - 5)$.

III вариант

Решите неравенство (1 – 3):

1. а) $(x+3)(x-2)(3x-9)<0$; б) $\frac{4x-1}{x+4}>0$.

2. а) $\frac{-15}{5x+6}<0$; б) $\frac{x^2-10x+26}{3x-5}<0$.

3. а) $\frac{x-4}{x-5}>\frac{x-5}{x-4}$; б) $(x-5)(x^2-4x+9)>(x-5)(x^2+x-6)$.

IV вариант

Решите неравенство (1 – 3):

1. а) $(x+4)(x-1)(4x-16)>0$; б) $\frac{5x+1}{x-5}>0$.

2. а) $\frac{-45}{6x+5}>0$; б) $\frac{x^2+8x+18}{5x-3}<0$.

3. а) $\frac{x-5}{x-6}>\frac{x-6}{x-5}$; б) $(x-4)(x^2-5x+8)>(x-4)(x^2+x-4)$.

С–8* Рациональные неравенства (продолжение)

I вариант

Решите неравенство (1 – 3):

1. а) $(x^2-9)(x^2+2x+1)<0$; б) $\frac{x^2+3x-4}{x-1}>0$.

2. а) $\frac{x^2}{x-3}>\frac{-9}{3-x}$; б) $(x^2-6x+8)^2<-x^2+6x-8$.

3. а) $\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2+\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2>\frac{2x^2-18}{x^2-4}$;

   б) $(x^2-2x-7)^2<(x^2-6x-3)^2$.

II вариант

Решите неравенство (1 – 3):

1. а) $(x^2-16)(x^2-4x+4)<0$; б) $\frac{x^2-x-2}{x-2}>0$.

2. а) $\frac{x^2}{x-2}>\frac{-4}{2-x}$; б) $(x^2-10x+24)^2<-x^2+10x-24$.

3. а) $\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2+\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^2>\frac{2x^2-8}{x^2-9}$;

   б) $(x^2-x-19)^2<(x^2-3x-11)^2$.

III вариант

Решите неравенство **(1 – 3)**:

1. а) $(x^2 + x - 12)(x^2 - 7x + 12) < 0$; б) $\dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3} > 0$.

2. а) $\dfrac{2x^2}{x - 4} > \dfrac{-32}{4 - x}$; б) $(x^2 + 10x + 24)^2 < -x^2 - 10x - 24$.

3. а) $\left(\dfrac{x - 3}{x + 4}\right)^2 + \left(\dfrac{x + 3}{x - 4}\right)^2 > \dfrac{2x^2 - 18}{x^2 - 16}$;

   б) $(x^2 + 3x - 10)^2 < (x^2 + x - 6)^2$.

IV вариант

Решите неравенство **(1 – 3)**:

1. а) $(x^2 + x - 6)(x^2 - 6x + 8) < 0$; б) $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} > 0$.

2. а) $\dfrac{2x^2}{x - 3} > \dfrac{-18}{3 - x}$; б) $(x^2 + 6x + 8)^2 < -x^2 - 6x - 8$.

3. а) $\left(\dfrac{x + 4}{x + 3}\right)^2 + \left(\dfrac{x - 4}{x - 3}\right)^2 > \dfrac{2x^2 - 32}{x^2 - 9}$;

   б) $(x^2 + 3x - 18)^2 < (x^2 + x - 12)^2$.

С–9* Системы рациональных неравенств

I вариант

Решите систему неравенств **(1–3)**:

1. а) $\begin{cases} (x + 3)(x - 4) > 0, \\ \dfrac{x - 5}{x + 5} < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x - 3}{x + 9} < 0, \\ \dfrac{x + 5}{x - 7} < 0. \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} 5x - 4 < 0, \\ \dfrac{13}{9x^2 - 16} < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{2x^2 + 3} > 0, \\ \dfrac{2x - 4}{x^2 - 2x - 8} < 0. \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} \dfrac{11}{2x + 5} > \dfrac{7}{2x + 5}, \\ 11x - 1 < 6x + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 4} > \dfrac{2x - 25}{x^2 - 4}, \\ \dfrac{x + 1002}{3x - 8} < \dfrac{x - 1005}{3x - 8}. \end{cases}$

II вариант

Решите систему неравенств (1–3):

1. а) $\begin{cases}(x+1)(x-2)>0,\\ \dfrac{x-3}{x+2}<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+7}<0,\\ \dfrac{x+4}{x-9}<0.\end{cases}$

2. а) $\begin{cases}7x-3<0,\\ \dfrac{14}{16x^2-9}<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{3x^2+2}>0,\\ \dfrac{3x-3}{x^2+x-12}<0.\end{cases}$

3. а) $\begin{cases}\dfrac{9}{5x+2}>\dfrac{5}{5x+2},\\ 12x-1<7x+2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x^2-9}>\dfrac{3x-16}{x^2-9},\\ \dfrac{x+1001}{4x-15}<\dfrac{x-1006}{4x-15}.\end{cases}$

III вариант

Решите систему неравенств (1–3):

1. а) $\begin{cases}(x+2)(x-5)>0,\\ \dfrac{x+3}{x-8}<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+13}<0,\\ \dfrac{x+4}{x-6}<0.\end{cases}$

2. а) $\begin{cases}9x-7<0,\\ \dfrac{16}{36x^2-25}<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x^2-36}{3x^2+0{,}5}>0,\\ \dfrac{2x-14}{x^2+2x-35}<0.\end{cases}$

3. а) $\begin{cases}\dfrac{14}{4x+1}>\dfrac{11}{4x+1},\\ 12x+1<3x+11;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{2x^2-49}{4x^2-1}>\dfrac{x-49}{4x^2-1},\\ \dfrac{x+1004}{5x-4}<\dfrac{x-1003}{5x-4}.\end{cases}$

IV вариант

Решите систему неравенств (1–3):

1. а) $\begin{cases}(x+4)(x-5)>0,\\ \dfrac{x+6}{x-7}<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x-8}{x+11}<0,\\ \dfrac{x+7}{x-3}<0.\end{cases}$

2. а) $\begin{cases}3x-4<0,\\ \dfrac{15}{25x^2-36}<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x^2-49}{4x^2+0{,}3}>0,\\ \dfrac{2x+16}{x^2-5x-24}<0.\end{cases}$

3. а) $\begin{cases} \dfrac{13}{5x+2} > \dfrac{9}{5x+2}, \\ 11x - 3 < 8x - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3x^2 - 64}{9x^2 - 1} > \dfrac{x - 64}{9x^2 - 1}, \\ \dfrac{x + 1005}{6x - 5} < \dfrac{x - 1002}{6x - 5}. \end{cases}$

С–10 Нестрогие неравенства

I вариант

Решите неравенство (1 – 3):

1. а) $2(5x - 1) + 5(x - 4) \leqslant 10 - x$; б) $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$.

2. а) $\dfrac{(x+3)(x-4)}{x-1} \leqslant 0$; б) $\dfrac{(x+6)(x-5)}{(x+2)(x-4)} \leqslant 0$.

3. а) $\dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 2} \geqslant 0$; б) $\dfrac{x^2 + 10x + 25}{x^2 + 1} \geqslant 0$.

II вариант

Решите неравенство (1 – 3):

1. а) $3(4x - 2) - 4(2x - 3) \leqslant 15 + x$; б) $x^2 + 6x + 11 \geqslant 0$.

2. а) $\dfrac{(x-1)(x+5)}{x+1} \geqslant 0$; б) $\dfrac{(x+5)(x-6)}{(x+4)(x-2)} \leqslant 0$.

3. а) $\dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 2} \geqslant 0$; б) $\dfrac{x^2 + 8x + 17}{x^2 + 2} \leqslant 0$.

III вариант

Решите неравенство (1 – 3):

1. а) $4(3x - 3) + 3(3x - 2) \leqslant 10 + 7x$; б) $x^2 - 8x + 16 \leqslant 0$.

2. а) $\dfrac{(2x+3)(3x-4)}{x-1} \leqslant 0$; б) $\dfrac{(x+5)(x-3)}{(x+7)(x-4)} \leqslant 0$.

3. а) $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 2x - 3} \geqslant 0$; б) $\dfrac{x^2 + 12x + 37}{x^2 + 11} \geqslant 0$.

IV вариант

Решите неравенство (1 – 3):

1. а) $5(2x - 4) - 2(4x - 1) \leqslant 2 - 5x$; б) $x^2 + 10x + 28 \geqslant 0$.

2. а) $\dfrac{(3x-4)(2x+5)}{x+1} \geqslant 0$; б) $\dfrac{(x+3)(x-5)}{(x+4)(x-7)} \leqslant 0$.

3. а) $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} \geqslant 0$; б) $\dfrac{x^2 + 14x + 50}{x^2 + 17} \leqslant 0$.

I вариант

Решите неравенство (1 – 2):

1. а) $(x+3)^2(x-4)(x-2) \leqslant 0$; б) $\dfrac{(x-1)^2}{(x+3)(x-6)} \geqslant 0$.

2. а) $\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x-1} \leqslant 0$; б) $x^4-x^3 \leqslant \dfrac{x-1}{x}$.

Решите систему неравенств (3 – 4):

3. а) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-3} \geqslant 0, \\ x^2-6x-7 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+1)(x-4) \geqslant 0, \\ (x-4)(x-6) \geqslant 0. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{x+1} \leqslant 0, \\ x^2+4x-12 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-3 \geqslant \dfrac{7}{x+3}, \\ x-1 \leqslant \dfrac{12}{x}. \end{cases}$

II вариант

Решите неравенство (1 – 2):

1. а) $(x+2)^2(x-3)(x+4) \geqslant 0$; б) $\dfrac{(x+3)^2}{(x+2)(x-5)} \leqslant 0$.

2. а) $\dfrac{x^3+x^2-16x+16}{x+1} \leqslant 0$; б) $x^4+x^3 \leqslant \dfrac{x+1}{x}$.

Решите систему неравенств (3 – 4):

3. а) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{x+8} \leqslant 0, \\ x^2+6x-7 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+4)(x-3) \geqslant 0, \\ (x-3)(x-5) \geqslant 0. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{x+2} \leqslant 0, \\ x^2+2x-15 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2 \geqslant \dfrac{5}{x+2}, \\ x-1 \leqslant \dfrac{6}{x}. \end{cases}$

III вариант

Решите неравенство (1 – 2):

1. а) $(x^2-9)(x^2-5x+6) \leqslant 0$; б) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-6x-7} \geqslant 0$.

2. а) $\dfrac{x^3-3x^2-25x+75}{3-x} \geqslant 0$; б) $x^4-3x^3 \leqslant \dfrac{81x-243}{x}$.

Решите систему неравенств **(3 – 4):**

3. а) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x+1} \geqslant 0, \\ x^2 + 3x - 4 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+1)(x-2) \leqslant 0, \\ (x-2)(x-5) \leqslant 0. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x+2} \leqslant 0, \\ x^2 - 2x - 15 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 5 \geqslant \dfrac{11}{x-5}, \\ x - 1 \leqslant \dfrac{42}{x}. \end{cases}$

IV вариант

Решите неравенство **(1 – 2):**

1. а) $(x^2 - 16)(x^2 - 9x + 20) \geqslant 0;$ б) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 9x + 8} \leqslant 0.$

2. а) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{2 - x} \geqslant 0;$ б) $x^4 + 3x^3 \leqslant \dfrac{81x + 243}{x}.$

Решите систему неравенств **(3 – 4):**

3. а) $\begin{cases} \dfrac{x-7}{x+2} \leqslant 0, \\ x^2 - 4x - 5 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+5)(x+2) \leqslant 0, \\ (x+2)(x-6) \leqslant 0. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x+1} \leqslant 0, \\ x^2 + x - 20 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 6 \geqslant \dfrac{13}{x-8}, \\ x - 1 \leqslant \dfrac{56}{x}. \end{cases}$

С – 12* Замена неизвестного при решении рациональных неравенств

I вариант

Решите неравенство **(1 – 3):**

1. $(x^2 + 2x)^2 - 11(x^2 + 2x) + 24 \leqslant 0.$

2. $\left(\dfrac{x^2 - 3x}{x - 2}\right)^2 + \dfrac{x^2 - 3x}{x - 2} - 6 \leqslant 0.$

3. $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + x + 1} - \dfrac{2x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} + 1 \leqslant 0.$

II вариант

Решите неравенство **(1 – 3):**

1. $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 \leqslant 0.$

2. $\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)^2-\dfrac{x^2+3x}{x+2}-6\leqslant 0.$

3. $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-x+1}-\dfrac{2x^2-2x+2}{2x^2-3x+1}+1\leqslant 0.$

III вариант

Решите неравенство (1 – 3):

1. $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3\leqslant 0.$

2. $\left(\dfrac{x^2+4x}{x+2}\right)^2-\dfrac{x^2+4x}{x+2}-6\leqslant 0.$

3. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}-\dfrac{6x^2+6x+6}{x^2+3x+2}+1\leqslant 0.$

IV вариант

Решите неравенство (1 – 3):

1. $(x^2-4x)^2+7(x^2-4x)+12\leqslant 0.$

2. $\left(\dfrac{x^2-4x}{x-2}\right)^2+\dfrac{x^2-4x}{x-2}-6\leqslant 0.$

3. $\dfrac{x^2+x}{x^2-x+1}-\dfrac{6x^2-6x+6}{x^2+x}+1\leqslant 0.$

С – 13* Замена неизвестного при решении иррациональных уравнений и неравенств

I вариант

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2-7x+21}=3;$ б) $\sqrt{x-1}=3x-7;$

в) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{4x-4}=1.$

2. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x-6}\leqslant 2;$ б) $x-5\sqrt{x}+6\leqslant 0;$

в) $\dfrac{8x}{x+5}-3\sqrt{\dfrac{8x}{x+5}}-4\geqslant 0.$

II вариант

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 6x + 12} = 2$; б) $\sqrt{x-2} = 2x - 7$;

в) $\sqrt{6x-2} - \sqrt{3x-2} = 1$.

2. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x-8} \leqslant 2$; б) $x - 6\sqrt{x} + 5 \leqslant 0$;

в) $\frac{10x}{x+6} - 4\sqrt{\frac{10x}{x+6}} - 5 \geqslant 0$.

III вариант

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 9x - 20} = 4$; б) $\sqrt{x-4} = 19 - 4x$;

в) $\sqrt{4x-3} - \sqrt{2x-2} = 1$.

2. Решите неравенство:

а) $\sqrt{5x-1} \leqslant 3$; б) $x - 9\sqrt{x} + 8 \leqslant 0$;

в) $\frac{12x}{x+4} - 5\sqrt{\frac{12x}{x+4}} - 6 \geqslant 0$.

IV вариант

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 8x - 23} = 5$; б) $\sqrt{x-3} = 19 - 5x$;

в) $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = 1$.

2. Решите неравенство:

а) $\sqrt{4x-3} \leqslant 3$; б) $x - 10\sqrt{x} + 9 \leqslant 0$;

в) $\frac{14x}{x+6} - 6\sqrt{\frac{14x}{x+6}} - 7 \geqslant 0$.

С–14 Корень степени *n*

I вариант

Вычислите **(1 – 2)**:

1. а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[6]{(-5)^6}$; в) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$; г) $\sqrt[4]{16} + \sqrt[5]{-32}$.

2. а) $3\sqrt[12]{12} - 7\sqrt[12]{12} + 4\sqrt[12]{12}$; б) $(\sqrt{20})^2 - \sqrt[5]{39^5} + (\sqrt[6]{18^3})^2$;

в) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} + \dfrac{\sqrt[5]{9^3}}{\sqrt[5]{3}}$.

Упростите выражение (3 – 5):

3. а) $(\sqrt{24} - \sqrt{21})(\sqrt{24} + \sqrt{21})$; б) $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})$;

в) $(\sqrt[4]{8} + 1)(\sqrt[4]{8^3} - \sqrt[4]{8^2} + \sqrt[4]{8} - 1)$; г) $(\sqrt[4]{108} - \sqrt[4]{27})(\sqrt[4]{12} + \sqrt[4]{3})$.

4. а) $\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)(\sqrt{75} - \sqrt{12})$; б) $\dfrac{5}{3-\sqrt[3]{2}} - \dfrac{6+2\sqrt[3]{2}}{5\sqrt[3]{4}}$.

5. $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}} - \dfrac{\sqrt[3]{5}}{6}$.

II вариант

Вычислите (1 – 2):

1. а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[8]{(-6)^8}$; в) $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$; г) $\sqrt[3]{-64} + \sqrt[4]{81}$.

2. а) $3\sqrt[13]{13} - 8\sqrt[13]{13} + 5\sqrt[13]{13}$; б) $(\sqrt{18})^2 - \sqrt[6]{38^6} + (\sqrt[6]{19^3})^2$;

в) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} - \dfrac{\sqrt[5]{4^3}}{\sqrt[5]{2}}$.

Упростите выражение (3 – 5):

3. а) $(\sqrt{26} - \sqrt{22})(\sqrt{26} + \sqrt{22})$; б) $(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{28} + \sqrt[3]{16})$;

в) $(\sqrt[4]{6} + 1)(\sqrt[4]{6^3} - \sqrt[4]{6^2} + \sqrt[4]{6} - 1)$; г) $(\sqrt[4]{72} - \sqrt[4]{8})(\sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{2})$.

4. а) $\left(\dfrac{1}{3-\sqrt{5}} - \dfrac{1}{3+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{45} - \sqrt{20})$; б) $\dfrac{41}{5-\sqrt[3]{2}} - \dfrac{10+2\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{4}}$.

5. $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}} - \dfrac{\sqrt[3]{4}}{5}$.

III вариант

Вычислите (1 – 2):

1. а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[10]{(-13)^{10}}$; в) $\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}$; г) $\sqrt[3]{-216} + \sqrt[4]{256}$.

2. а) $12\sqrt[15]{15} - 15\sqrt[15]{15} + 3\sqrt[15]{15}$; б) $(\sqrt{19})^2 - \sqrt[6]{41^6} + (\sqrt[8]{20^4})^2$;

в) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5} - \dfrac{\sqrt[7]{16^4}}{\sqrt[7]{4}}$.

Упростите выражение **(3 – 5)**:

3. а) $(\sqrt{27} - \sqrt{21})(\sqrt{27} + \sqrt{21})$; б) $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6})(\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{36})$;

в) $(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{125} + \sqrt[4]{75} + \sqrt[4]{45} + \sqrt[4]{27})$;

г) $(\sqrt[4]{72} - \sqrt[4]{32})(\sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{8})$.

4. а) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6 - \sqrt{11}} - \dfrac{\sqrt{2}}{6 + \sqrt{11}}\right)(\sqrt{88} - \sqrt{22})$; б) $\dfrac{11}{3 - \sqrt[3]{5}} - \dfrac{15 + 5\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{25}}$.

5. $\dfrac{1}{4 - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{9}} - \dfrac{\sqrt[3]{3}}{11}$.

IV вариант

Вычислите **(1 – 2)**:

1. а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[12]{(-11)^{12}}$; в) $\sqrt[3]{-1\dfrac{91}{125}}$; г) $\sqrt[3]{-216} + \sqrt[4]{625}$.

2. а) $13\sqrt[14]{14} - 17\sqrt[14]{14} + 4\sqrt[14]{14}$; б) $(\sqrt{21})^2 - \sqrt[7]{42^7} + (\sqrt[8]{19^4})^2$;

в) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{36} + \dfrac{\sqrt[7]{81^4}}{\sqrt[7]{9}}$.

Упростите выражение **(3 – 5)**:

3. а) $(\sqrt{28} - \sqrt{22})(\sqrt{28} + \sqrt{22})$; б) $(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{25})$;

в) $(\sqrt[4]{4} - \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{64} + \sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{8})$;

г) $(\sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{108})(\sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{12})$.

4. а) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{5 - \sqrt{10}} - \dfrac{\sqrt{3}}{5 + \sqrt{10}}\right)(\sqrt{120} - \sqrt{30})$; б) $\dfrac{5}{3 - \sqrt[3]{7}} - \dfrac{21 + 7\sqrt[3]{7}}{4\sqrt[3]{49}}$.

5. $\dfrac{1}{9 - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{4}} - \dfrac{\sqrt[3]{2}}{29}$.

I вариант

1. Упростите выражение $\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}$ и найдите его значение при $x = \sqrt[3]{5^{10}}$.
2. Найдите значение выражения:

   а) $\dfrac{\sqrt[4]{16x^5y^4}}{3y\sqrt[4]{x}}$ при $x = 6$, $y = -\dfrac{2}{5}$;

   б) $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \cdot \dfrac{x - y}{\sqrt{2}}$ при $x = \sqrt[4]{5 + 2\sqrt{6}}$, $y = \sqrt[4]{5 - 2\sqrt{6}}$.

3. а) Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt[4]{48x^8y^4}$ при условии, что $y < 0$.

   б) Внесите множитель под знак корня $5y\sqrt[4]{x}$ при условии, что $y < 0$.

II вариант

1. Упростите выражение $\sqrt[8]{x\sqrt[5]{x}}$ и найдите его значение при $x = \sqrt[3]{4^{20}}$.
2. Найдите значение выражения:

   а) $\dfrac{\sqrt[4]{x^4y^5}}{3x\sqrt[4]{81y}}$ при $x = -\dfrac{5}{9}$, $y = 18$;

   б) $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \cdot \dfrac{x - y}{\sqrt{6}}$ при $x = \sqrt[4]{8 + 2\sqrt{15}}$, $y = \sqrt[4]{8 - 2\sqrt{15}}$.

3. а) Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt[4]{162x^4y^8}$ при условии, что $x < 0$.

   б) Внесите множитель под знак корня $2y\sqrt[4]{x}$ при условии, что $y < 0$.

III вариант

1. Упростите выражение $\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}$ и найдите его значение при $x = \sqrt{6^5}$.
2. Найдите значение выражения:

   а) $\dfrac{\sqrt[6]{x^7y^6}}{3y\sqrt[6]{x}}$ при $x = 12$, $y = -\dfrac{3}{5}$;

б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{y}\right):\frac{\sqrt{5}}{x-y}$ при $x=\sqrt[4]{12-2\sqrt{35}},\ y=\sqrt[4]{12+2\sqrt{35}}.$

3. а) Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt[4]{64x^{12}y^{8}}$ при условии, что $x<0$.

б) Внесите множитель под знак корня $3y\sqrt[6]{x}$ при условии, что $y<0$.

IV вариант

1. Упростите выражение $\sqrt[6]{x\sqrt[3]{x}}$ и найдите его значение при $x=\sqrt{5^{9}}$.

2. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sqrt[6]{x^6y^7}}{3x\sqrt[6]{y}}$ при $x=-\frac{5}{9},\ y=18;$

б) $\left(\frac{\sqrt{5}}{x}+\frac{\sqrt{5}}{y}\right):\frac{\sqrt{3}}{x-y}$ при $x=\sqrt[4]{9-2\sqrt{14}},\ y=\sqrt[4]{9+2\sqrt{14}}.$

3. а) Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt[4]{80x^{8}y^{12}}$ при условии, что $y<0$.

б) Внесите множитель под знак корня $2x\sqrt[6]{y}$ при условии, что $x<0$.

С – 16* Степень с рациональным показателем

I вариант

1. Запишите в виде степени: $\sqrt{3};\ \sqrt[3]{5};\ \sqrt[5]{7^6}$.

Вычислите (2 – 3):

2. а) $25^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}-(\sqrt[4]{9})^2;$ б) $(\sqrt[7]{8})^2:4^{\frac{3}{7}}+\left(3^{\frac{1}{5}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^3\cdot\frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt{2}}.$

3. а) $\left(25^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{2}}\right)\left(25^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}}\right);$ б) $\left(10^{\frac{1}{3}}+3\right)\left(100^{\frac{1}{3}}-10^{\frac{1}{3}}\cdot 3+9\right).$

4. Найдите значение выражения $\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)$, если $a=41$.

II вариант

1. Запишите в виде корня: $3^{\frac{1}{2}}$; $4^{\frac{1}{3}}$; $5^{\frac{3}{4}}$.

Вычислите (2 – 3):

2. а) $8^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}-(\sqrt[4]{4})^2$; б) $(\sqrt[5]{9})^3:27^{\frac{2}{5}}+\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{5}}\right)^3\cdot\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt{3}}$.

3. а) $\left(36^{\frac{1}{4}}-5^{\frac{1}{2}}\right)\left(36^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $\left(11^{\frac{1}{3}}-2\right)\left(121^{\frac{1}{3}}+11^{\frac{1}{3}}\cdot 2+4\right)$.

4. Найдите значение выражения $\left(a^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(1+a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{4}}\right)$, если $a=31$.

III вариант

1. Запишите в виде степени: $\sqrt{17}$; $\sqrt[3]{12}$; $\sqrt[4]{16^5}$.

Вычислите (2 – 3):

2. а) $27^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}-(\sqrt[4]{49})^2$; б) $(\sqrt[7]{16})^3\cdot 8^{-\frac{4}{7}}+\left(5^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^5\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{5}}$.

3. а) $\left(49^{\frac{1}{4}}-25^{\frac{1}{4}}\right)\left(49^{\frac{1}{4}}+25^{\frac{1}{4}}\right)$; б) $\left(15^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{3}}\right)\left(225^{\frac{1}{3}}-60^{\frac{1}{3}}+16^{\frac{1}{3}}\right)$.

4. Найдите значение выражения $\left(a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{-\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)$, если $a=41$.

IV вариант

1. Запишите в виде корня: $13^{\frac{1}{2}}$; $15^{\frac{1}{4}}$; $14^{\frac{2}{3}}$.

Вычислите (2 – 3):

2. а) $125^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}-\left(\sqrt[4]{36}\right)^2$; б) $\left(\sqrt[5]{27}\right)^4\cdot 9^{-\frac{6}{5}}+\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^5\cdot\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{2}}$.

3. а) $\left(64^{\frac{1}{4}}-36^{\frac{1}{4}}\right)\left(64^{\frac{1}{4}}+36^{\frac{1}{4}}\right)$; б) $\left(12^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}\right)\left(144^{\frac{1}{3}}+60^{\frac{1}{3}}+25^{\frac{1}{3}}\right)$.

4. Найдите значение выражения $\left(a^{-\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)$, если $a = 51$.

С – 17 Числовые последовательности

I вариант

1. Последовательность задана формулой n-го члена $a_n = 3^{n-2}$. Выпишите пять первых членов этой последовательности.
2. Задайте формулой n-го члена последовательность:

   а) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots$; б) $-3, 6, -9, 12, -15, \ldots$.
3. Сколько отрицательных членов содержит последовательность, заданная формулой n-го члена $a_n = -150 + \frac{2n}{3}$?
4. Определите номер наименьшего члена последовательности, заданной формулой n-го члена $c_n = n^2 - 23\frac{1}{3}n + 21$.

II вариант

1. Последовательность задана формулой n-го члена $a_n = 2n - 17$. Выпишите пять первых членов этой последовательности.
2. Задайте формулой n-го члена последовательность:

   а) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$; б) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, -4, \ldots$.
3. Сколько положительных членов содержит последовательность, заданная формулой n-го члена $a_n = 160 - \frac{3n}{2}$?
4. Определите номер наименьшего члена последовательности, заданной формулой n-го члена $c_n = n^2 - 25\frac{1}{3}n + 12$.

III вариант

1. Последовательность задана формулой n-го члена $a_n = -2^{n-3}$. Выпишите пять первых членов этой последовательности.
2. Задайте формулой n-го члена последовательность:

   а) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$; б) $2, -4, 8, -16, 32, \ldots$.
3. Сколько отрицательных членов содержит последовательность, заданная формулой n-го члена $a_n = -170 + \frac{4n}{5}$?

4. Определите номер наибольшего члена последовательности, заданной формулой n-го члена $c_n = -n^2 + 35\frac{1}{3}n + 31$.

IV вариант

1. Последовательность задана формулой n-го члена $a_n = -3n + 7$. Выпишите пять первых членов этой последовательности.
2. Задайте формулой n-го члена последовательность:

   а) 3, 7, 11, 15, 19, ...; б) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}$, 1, –3, 9, ...
3. Сколько положительных членов содержит последовательность, заданная формулой n-го члена $a_n = 180 - \frac{5n}{4}$?
4. Определите номер наибольшего члена последовательности, заданной формулой n-го члена $c_n = -n^2 + 33\frac{1}{3}n + 23$.

С–18 Арифметическая прогрессия

I вариант

1. Найдите двенадцатый член арифметической прогрессии 4,2; 3,5; ... .
2. Тринадцатый член арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равен 5, а двадцатый член равен 1,5. Найдите первый член и разность этой арифметической прогрессии.
3. Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии 4,8; 4,6; ... .
4. Сколько первых членов арифметической прогрессии –7; –6; –5; ... нужно сложить, чтобы получить –27?

II вариант

1. Найдите шестнадцатый член арифметической прогрессии – 3,5; – 3,2; ... .
2. Двенадцатый член арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равен 1,7, а семнадцатый член равен 1,2. Найдите первый член и разность этой арифметической прогрессии.
3. Найдите сумму первых двадцати двух членов арифметической прогрессии 3,6; 3,4; ... .
4. Сколько первых членов арифметической прогрессии –6; –5; –4; ... нужно сложить, чтобы получить –15?

III вариант

1. Найдите двадцать шестой член арифметической прогрессии $-2{,}4;\ -2{,}2;\ \ldots$.
2. Четырнадцатый член арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равен 2,9, а десятый член равен 0,5. Найдите первый член и разность этой арифметической прогрессии.
3. Найдите сумму первых двадцати девяти членов арифметической прогрессии $-3{,}5;\ -3{,}7;\ \ldots$.
4. Сколько первых членов арифметической прогрессии $-12;\ -10;\ -8;\ \ldots$ нужно сложить, чтобы получить -36?

IV вариант

1. Найдите двадцать третий член арифметической прогрессии $-4{,}4;\ -4{,}2;\ \ldots$.
2. Двадцатый член арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равен 2,9, а семнадцатый член равен 2,3. Найдите первый член и разность этой арифметической прогрессии.
3. Найдите сумму первых двадцати восьми членов арифметической прогрессии $-2{,}3;\ -2{,}5;\ \ldots$.
4. Сколько первых членов арифметической прогрессии $-13;\ -11;\ -9;\ \ldots$ нужно сложить, чтобы получить -40?

С–19 Геометрическая прогрессия

I вариант

1. Первый член геометрической прогрессии равен 3, а знаменатель равен -2. Найдите шестой член этой прогрессии.
2. Третий член геометрической прогрессии с положительными членами равен 2, а пятый член равен $\frac{2}{9}$. Найдите второй член этой прогрессии.
3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, для которой отношение суммы четвертого и пятого членов прогрессии к сумме второго и третьего членов равно $\frac{1}{4}$.
4. Первый член геометрической прогрессии равен 81, а знаменатель равен $\frac{1}{3}$. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

II вариант

1. Первый член геометрической прогрессии равен 2, а знаменатель равен -3. Найдите пятый член этой прогрессии.
2. Шестой член геометрической прогрессии с положительными членами равен 4, а четвертый член равен 9. Найдите седьмой член этой прогрессии.
3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, для которой отношение суммы пятого и шестого членов прогрессии к сумме третьего и четвертого членов равно $\frac{1}{9}$.
4. Первый член геометрической прогрессии равен 27, а знаменатель равен $\frac{1}{3}$. Найдите сумму первых семи членов этой прогрессии.

III вариант

1. Найдите шестой член геометрической прогрессии $81; -54; 36; \ldots$.
2. Пятый член геометрической прогрессии с отрицательными членами равен $-\frac{1}{9}$, а седьмой член равен $-\frac{1}{4}$. Найдите четвертый член этой прогрессии.
3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, для которой отношение суммы третьего, четвертого и пятого членов прогрессии к сумме третьего и четвертого членов равно $\frac{7}{3}$.
4. Первый член геометрической прогрессии равен 64, а знаменатель равен $-\frac{1}{2}$. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

IV вариант

1. Найдите шестой член геометрической прогрессии $64; -48; 36; \ldots$.
2. Седьмой член геометрической прогрессии с отрицательными членами равен $-\frac{1}{6}$, а пятый член равен $-\frac{3}{4}$. Найдите четвертый член этой прогрессии.
3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, для которой отношение суммы второго, третьего и четвертого членов прогрессии к сумме третьего и четвертого членов равно $\frac{13}{12}$.

4. Первый член геометрической прогрессии равен 32, а знаменатель равен $-\frac{1}{4}$. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

С-20* Задачи на прогрессии

I вариант

1. а) Сумма тринадцатого и тридцать первого членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна 200. Найдите двадцать второй член этой прогрессии.
   б) Произведение пятого и семнадцатого членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равно 36. Найдите одиннадцатый член этой прогрессии.

2. а) Сумма второго и шестого членов возрастающей арифметической прогрессии $\{x_n\}$ равна 14, а произведение третьего и пятого членов этой прогрессии равно 45. Найдите первый член этой прогрессии.
   б) Сумма второго и пятого членов убывающей геометрической прогрессии $\{y_n\}$ равна 84, а произведение третьего и четвертого членов этой прогрессии равно 243. Найдите первый член этой прогрессии.

3. Между числами 1 и $-5\sqrt{5}$ нужно вставить два числа так, чтобы все четыре числа составили геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4. Три числа $x - 2$, $\sqrt{8x}$, $x + 12$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Найдите x.

II вариант

1. а) Сумма четырнадцатого и тридцать второго членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна 300. Найдите двадцать третий член этой прогрессии.
   б) Произведение шестого и восемнадцатого членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равно 49. Найдите двенадцатый член этой прогрессии.

2. а) Сумма второго и пятого членов убывающей арифметической прогрессии $\{x_n\}$ равна 16, а произведение первого и шестого членов этой прогрессии равно 39. Найдите первый член этой прогрессии.

б) Сумма второго и шестого членов возрастающей геометрической прогрессии $\{y_n\}$ равна 34, а произведение третьего и пятого членов этой прогрессии равно 64. Найдите первый член этой прогрессии.

3. Между числами 1 и $-6\sqrt{6}$ нужно вставить два числа так, чтобы все четыре числа составили геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4. Три числа $x + 6$, $\sqrt{5x}$, $x - 2$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Найдите x.

III вариант

1. а) Сумма двенадцатого и тридцать шестого членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна 400. Найдите двадцать четвертый член этой прогрессии.
   б) Произведение восьмого и восемнадцатого членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равно 64. Найдите тринадцатый член этой прогрессии.

2. а) Сумма третьего и пятого членов возрастающей арифметической прогрессии $\{x_n\}$ равна 16, а произведение второго и шестого членов этой прогрессии равно 28. Найдите первый член этой прогрессии.
   б) Сумма первого и седьмого членов убывающей геометрической прогрессии $\{y_n\}$ равна 17, а произведение третьего и пятого членов этой прогрессии равно 16. Найдите первый член этой прогрессии.

3. Между числами 6 и $-12\sqrt{2}$ нужно вставить два числа так, чтобы все четыре числа составили геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4. Три числа $x - 3$, $\sqrt{5x}$, $x + 4$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Найдите x.

IV вариант

1. а) Сумма одиннадцатого и тридцать девятого членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна 500. Найдите двадцать пятый член этой прогрессии.
   б) Произведение шестого и двадцать второго членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равно 81. Найдите четырнадцатый член этой прогрессии.

2. а) Сумма первого и седьмого членов убывающей арифметической прогрессии $\{x_n\}$ равна 10, а произведение третьего и пятого членов этой прогрессии равно 16. Найдите первый член этой прогрессии.

б) Сумма второго и пятого членов возрастающей геометрической прогрессии $\{y_n\}$ равна 36, а произведение третьего и четвертого членов этой прогрессии равно 243. Найдите первый член этой прогрессии.

3. Между числами 6 и $-18\sqrt{3}$ нужно вставить два числа так, чтобы все четыре числа составили геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4. Три числа $x + 5$, $\sqrt{6x}$, $x - 2$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Найдите x.

С – 21* Градусная и радианная меры угла

I вариант

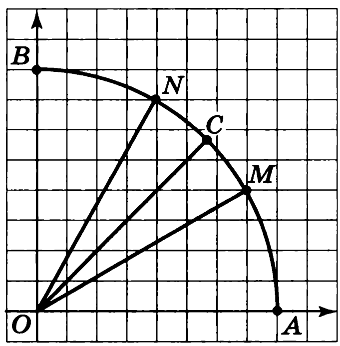

Рис. 65

1. Найдите радианные меры углов α и β, если известны их градусные меры: $\alpha = 180°$, $\beta = 30°$.
2. Найдите градусные меры углов α и β, если известны их радианные меры: $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$.
3. Точка C делит дугу AB единичной окружности на две равные части, а точки M и N делят дугу AB на три равные части (рис. 65). Определите:
   а) градусную меру угла AOC;
   б) радианную меру угла AON.

II вариант

1. Найдите радианные меры углов α и β, если известны их градусные меры: $\alpha = 90°$, $\beta = 270°$.
2. Найдите градусные меры углов α и β, если известны их радианные меры: $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$.
3. Точка C делит дугу AB единичной окружности на две равные части, а точки M и N делят дугу AB на три равные части (см. рис. 65). Определите:
   а) градусную меру угла AON;
   б) радианную меру угла AOC.

III вариант

1. Найдите радианные меры углов α и β, если известны их градусные меры: $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$.
2. Найдите градусные меры углов α и β, если известны их радианные меры: $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{3\pi}{4}$.

3. Точка C делит дугу AB единичной окружности на две равные части, а точки M и N делят дугу AB на три равные части (см. рис. 65). Определите:
а) градусную меру угла AOM;
б) радианную меру угла AOC.

IV вариант

1. Найдите радианные меры углов α и β, если известны их градусные меры: $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$.
2. Найдите градусные меры углов α и β, если известны их радианные меры: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{3\pi}{2}$.
3. Точка C делит дугу AB единичной окружности на две равные части, а точки M и N делят дугу AB на три равные части (см. рис. 65). Определите:
а) градусную меру угла AOC;
б) радианную меру угла AOM.

С–22* Координаты некоторых точек единичной окружности

I вариант

1. Определите координаты точек B и C и градусную меру углов α и β, если точки B и C, соответствующие углам α и β, лежат на пересечении:
а) оси Oy с единичной окружностью (рис. 66, *а*);
б) биссектрис I и III координатных углов с единичной окружностью (рис. 66, *б*).
2. Определите координаты точек B и C и радианную меру углов α и β, если точки B и C, соответствующие углам α и β, лежат на пересечении:
а) прямых $y = \frac{1}{2}$ и $y = -\frac{1}{2}$ с единичной окружностью (рис. 66, *в*);
б) прямых $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$ с единичной окружностью (рис. 66, *г*).

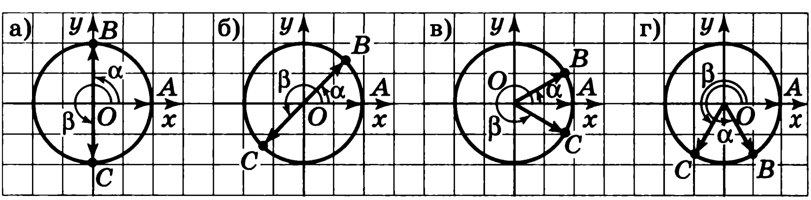

Рис. 66

II вариант

1. Определите координаты точек B и C и градусную меру углов α и β, если точки B и C, соответствующие углам α и β, лежат на пересечении:
   а) биссектрис II и IV координатных углов с единичной окружностью (рис. 67, *а*);
   б) оси Ox с единичной окружностью (рис. 67, *б*).
2. Определите координаты точек B и C и радианную меру углов α и β, если точки B и C, соответствующие углам α и β, лежат на пересечении:
   а) прямых $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$ с единичной окружностью (рис. 67, *в*);
   б) прямых $y = \frac{1}{2}$ и $y = -\frac{1}{2}$ с единичной окружностью (рис. 67, *г*).

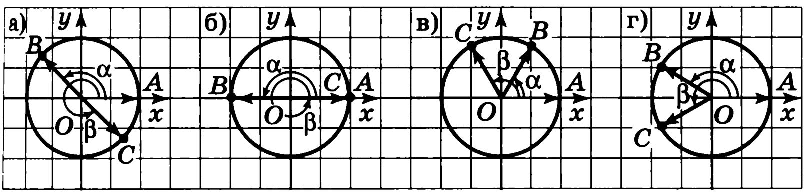

Рис. 67

III вариант

1. Определите координаты точек B и C и градусную меру углов α и β, если точки B и C, соответствующие углам α и β, лежат на пересечении:
   а) прямых $y = \frac{1}{2}$ и $y = -\frac{1}{2}$ с единичной окружностью (рис. 68, *а*);
   б) прямых $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$ с единичной окружностью (рис. 68, *б*).

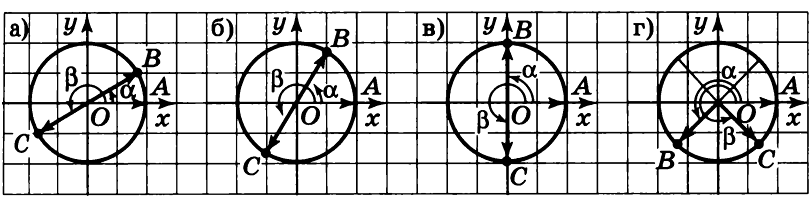

Рис. 68

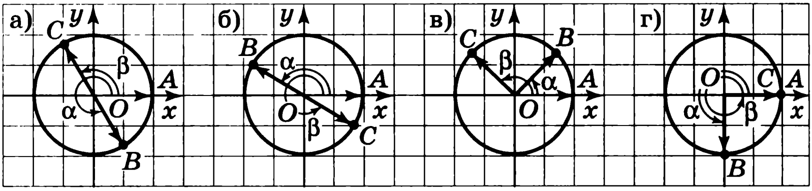

Рис. 69

2. Определите координаты точек B и C и радианную меру углов α и β, если точки B и C, соответствующие углам α и β, лежат на пересечении:
   а) оси Oy с единичной окружностью (рис. 68, *в*);
   б) биссектрис III и IV координатных углов с единичной окружностью (рис. 68, *г*).

IV вариант

1. Определите координаты точек B и C и градусную меру углов α и β, если точки B и C, соответствующие углам α и β, лежат на пересечении:
   а) прямых $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$ с единичной окружностью (рис. 69, *а*);
   б) прямых $y = \frac{1}{2}$ и $y = -\frac{1}{2}$ с единичной окружностью (рис. 69, *б*).
2. Определите координаты точек B и C и радианную меру углов α и β, если точки B и C, соответствующие углам α и β, лежат на пересечении:
   а) биссектрис I и II координатных углов с единичной окружностью (рис. 69, *в*);
   б) осей координат с единичной окружностью (рис. 69, *г*).

С–23* Синус и косинус угла

I вариант

1. Определите синус и косинус острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 70).
2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α, β, γ и φ (рис. 71). Определите синус и косинус каждого из этих углов.

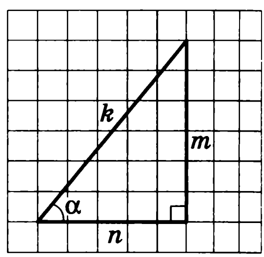

Рис. 70

3. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos\alpha = -1$.

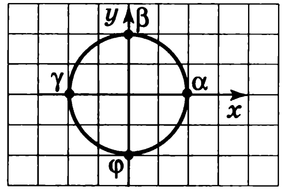

Рис. 71

II вариант

1. Определите синус и косинус острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 72).
2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α, β, γ и φ (рис. 73). Определите синус и косинус каждого из этих углов.
3. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$;

в) $\cos\alpha = 1$; г) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

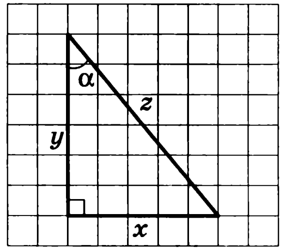

Рис. 72

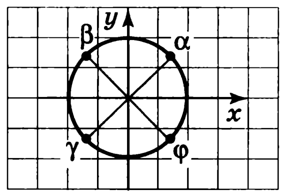

Рис. 73

III вариант

1. Определите синус и косинус острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 74).
2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α, β, γ и φ (рис. 75). Определите синус и косинус каждого из этих углов.
3. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin\alpha = -1$;

в) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; г) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

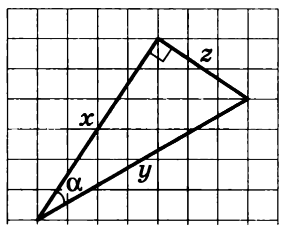

Рис. 74

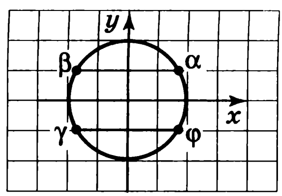

Рис. 75

IV вариант

1. Определите синус и косинус острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 76).
2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α, β, γ и φ (рис. 77). Определите синус и косинус каждого из этих углов.
3. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

   а) $\sin\alpha = 1$; б) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

   в) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

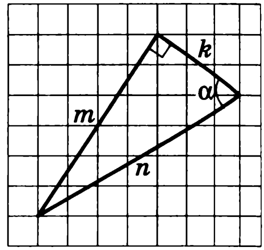

Рис. 76

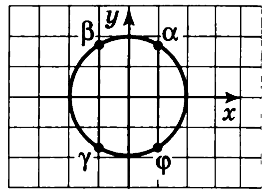

Рис. 77

С–24* Формулы для синуса и косинуса угла

I вариант

1. Вычислите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $90° < \alpha < 180°$.
2. Докажите, что для любого угла α справедливо равенство $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.
3. Вычислите $\left(\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4}\right)\cdot\sin(-0{,}5\pi) : \cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.
4. Вычислите $\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{2\sin\alpha}$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$.

II вариант

1. Вычислите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $90° < \alpha < 180°$.
2. Докажите, что для любого угла α справедливо равенство $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.
3. Вычислите $\left(\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\sin(-1{,}5\pi) : \cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$.
4. Вычислите $\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{3\cos\alpha}$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

III вариант

1. Вычислите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $180° < \alpha < 270°$.

2. Докажите, что для любого угла α справедливо равенство $\sin(3\pi + \alpha) = -\sin\alpha$.

3. Вычислите $\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \sin(-3,5\pi) : \cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

4. Вычислите $\frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha - \cos^3\alpha}$, если $\cos\alpha = \frac{2}{7}$.

IV вариант

1. Вычислите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, $180° < \alpha < 270°$.

2. Докажите, что для любого угла α справедливо равенство $\cos(3\pi + \alpha) = -\cos\alpha$.

3. Вычислите $\left(\cos\frac{17\pi}{3} + \sin\frac{25\pi}{6}\right) \cdot \sin(-2,5\pi) : \cos\left(-\frac{35\pi}{4}\right)$.

4. Вычислите $\frac{3\cos^2\alpha}{\sin\alpha - \sin^3\alpha}$, если $\sin\alpha = \frac{3}{4}$.

С-25* Тангенс и котангенс угла

I вариант

1. Определите тангенс и котангенс острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 78).

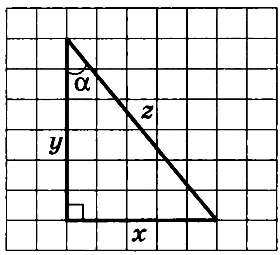

Рис. 78

2. Вычислите:
а) $\operatorname{tg} 0° + \operatorname{ctg}(-90°) + \operatorname{tg} 60° \operatorname{ctg} 120°$;
б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$.

3. Вычислите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и $90° < \alpha < 180°$.

4. Вычислите $\frac{4\sin\alpha - 3\cos\alpha}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

II вариант

1. Определите тангенс и котангенс острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 79).

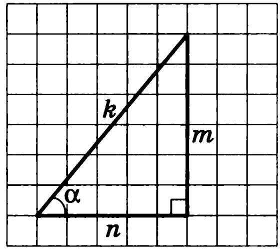

Рис. 79

2. Вычислите:
а) $\operatorname{tg}(-180°) + \operatorname{ctg} 270° + \operatorname{tg} 120° \operatorname{ctg} 60°$;
б) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

3. Вычислите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и $180° < \alpha < 270°$.

4. Вычислите $\frac{5\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

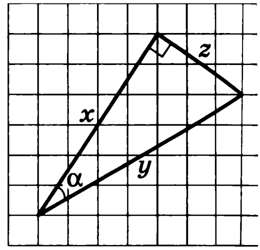

Рис. 80

III вариант

1. Определите тангенс и котангенс острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 80).
2. Вычислите:
   а) $\operatorname{tg}(-360°)+\operatorname{ctg}90°+\operatorname{tg}240°\operatorname{ctg}300°$;
   б) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$.
3. Вычислите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$ и $90° < \alpha < 180°$.
4. Вычислите $\frac{4\sin\alpha - 7\cos\alpha}{5\sin\alpha + 3\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -3$.

IV вариант

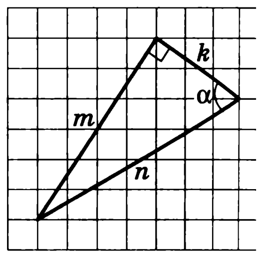

Рис. 81

1. Определите тангенс и котангенс острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 81).
2. Вычислите:
   а) $\operatorname{tg}180°+\operatorname{ctg}(-270°)+\operatorname{tg}300°\operatorname{ctg}240°$;
   б) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}$.
3. Вычислите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{15}$ и $270° < \alpha < 360°$.
4. Вычислите $\frac{5\sin\alpha - 6\cos\alpha}{3\sin\alpha + 5\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

С–26* Косинус суммы и косинус разности двух углов. Синус суммы и синус разности двух углов

I вариант

1. Вычислите:
   а) $\cos 54°\cos 6° - \sin 54°\sin 6°$; б) $\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{20} + \sin\frac{\pi}{20}\sin\frac{3\pi}{10}$.
2. Упростите выражение
   $\sin(3\alpha + 2\beta)\cos(\alpha + 2\beta) - \sin(\alpha + 2\beta)\cos(3\alpha + 2\beta)$.

3. Вычислите $\frac{\sin 13^\circ \cos 47^\circ + \sin 47^\circ \cos 13^\circ}{\cos 98^\circ \cos 38^\circ + \sin 98^\circ \sin 38^\circ}$.

4. Сравните $\frac{\sin 58^\circ \cos 52^\circ + \sin 52^\circ \cos 58^\circ}{\cos 68^\circ \cos 42^\circ - \sin 42^\circ \sin 68^\circ}$ и $\frac{\sin 48^\circ + \cos 48^\circ}{\cos 24^\circ - \sin 24^\circ}$.

II вариант

1. Вычислите:
   а) $\cos 72^\circ \cos 42^\circ + \sin 72^\circ \sin 42^\circ$;
   б) $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{15} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}$.
2. Упростите выражение
   $\sin(2\alpha + 3\beta)\cos(\alpha - 3\beta) + \sin(\alpha - 3\beta)\cos(2\alpha + 3\beta)$.
3. Вычислите $\frac{\sin 54^\circ \cos 24^\circ - \sin 24^\circ \cos 54^\circ}{\cos 57^\circ \cos 27^\circ + \sin 57^\circ \sin 27^\circ}$.
4. Сравните $\frac{\sin 59^\circ \cos 61^\circ + \sin 61^\circ \cos 59^\circ}{\cos 58^\circ \cos 62^\circ - \sin 62^\circ \sin 58^\circ}$ и $\frac{\sin 36^\circ + \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ - \sin 18^\circ}$.

III вариант

1. Вычислите:
   а) $\sin 28^\circ \cos 17^\circ + \sin 17^\circ \cos 28^\circ$;
   б) $\sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{30} - \sin \frac{7\pi}{30} \cos \frac{2\pi}{5}$.
2. Упростите выражение
   $\cos(3\alpha - 2\beta)\cos(\alpha - 2\beta) + \sin(3\alpha - 2\beta)\sin(\alpha - 2\beta)$.
3. Вычислите $\frac{\cos 59^\circ \cos 29^\circ + \sin 59^\circ \sin 29^\circ}{\sin 73^\circ \cos 47^\circ + \sin 47^\circ \cos 73^\circ}$.
4. Сравните $\frac{\sin 67^\circ \cos 73^\circ + \sin 73^\circ \cos 67^\circ}{\cos 55^\circ \cos 65^\circ - \sin 55^\circ \sin 65^\circ}$ и $\frac{\sin 36^\circ + \cos 36^\circ}{1 - \cos 72^\circ + \sin 72^\circ}$.

IV вариант

1. Вычислите:
   а) $\sin 111^\circ \cos 21^\circ - \sin 21^\circ \cos 111^\circ$;
   б) $\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{21} + \sin \frac{4\pi}{21} \cos \frac{\pi}{7}$.
2. Упростите выражение
   $\cos(5\alpha - 2\beta)\cos(\alpha - 2\beta) + \sin(5\alpha - 2\beta)\sin(\alpha - 2\beta)$.
3. Вычислите $\frac{\cos 23^\circ \cos 22^\circ - \sin 23^\circ \sin 22^\circ}{\sin 19^\circ \cos 26^\circ + \sin 26^\circ \cos 19^\circ}$.
4. Сравните $\frac{\sin 56^\circ \cos 79^\circ + \sin 79^\circ \cos 56^\circ}{\cos 66^\circ \cos 44^\circ - \sin 66^\circ \sin 44^\circ}$ и $\frac{\sin 37^\circ + \cos 37^\circ}{1 - \cos 74^\circ + \sin 74^\circ}$.

С – 27* Формулы приведения для синуса и косинуса

I вариант

1. Упростите выражение:

   а) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\cos(3\pi+\alpha)$; в) $\sin\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$.

2. Вычислите $3\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)+2\sin(17\pi-\alpha)$, если $\sin\alpha=-0{,}2$.

3. Вычислите $\dfrac{3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-2\cos(\pi-\alpha)}{2\sin(\pi+\alpha)-3\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$, если $\operatorname{tg}\alpha=5$.

4. Докажите равенство $\dfrac{3\cos 50^\circ-4\sin 140^\circ}{\cos 130^\circ}=1$.

II вариант

1. Упростите выражение:

   а) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\sin(3\pi+\alpha)$; в) $\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$.

2. Вычислите $2\sin\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)-5\cos(17\pi-\alpha)$, если $\cos\alpha=-0{,}3$.

3. Вычислите $\dfrac{3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+2\sin(\pi-\alpha)}{2\cos(\pi+\alpha)-3\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$, если $\operatorname{tg}\alpha=4$.

4. Докажите равенство $\dfrac{4\cos 25^\circ-3\sin 65^\circ}{\sin 115^\circ}=1$.

III вариант

1. Упростите выражение:

   а) $\sin\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\cos(5\pi+\alpha)$; в) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

2. Вычислите $4\cos\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)-5\sin(15\pi-\alpha)$, если $\sin\alpha=-0{,}4$.

3. Вычислите $\dfrac{2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-3\cos(\pi-\alpha)}{3\sin(\pi+\alpha)-2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=5$.

4. Докажите равенство $\dfrac{5\sin 140^\circ+4\cos 130^\circ}{\cos 310^\circ}=1$.

IV вариант

1. Упростите выражение:

а) $\cos\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\sin(5\pi+\alpha)$; в) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

2. Вычислите $5\sin\left(\frac{13\pi}{2}+\alpha\right)-4\cos(19\pi-\alpha)$, если $\cos\alpha=-0{,}3$.

3. Вычислите $\dfrac{2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-3\cos(\pi+\alpha)}{3\sin(\pi-\alpha)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=4$.

4. Докажите равенство $\dfrac{5\cos20^\circ-4\sin110^\circ}{\cos340^\circ}=1$.

С–28* Сумма и разность синусов и косинусов

I вариант

1. Запишите в виде произведения:
   а) $\sin70^\circ+\sin50^\circ$; б) $\sin70^\circ-\sin50^\circ$;
   в) $\cos70^\circ+\cos50^\circ$; г) $\cos70^\circ-\cos50^\circ$.
2. Докажите равенство $\sin200^\circ+\sin100^\circ=\sin40^\circ$.
3. Вычислите $\sin\frac{7\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{7\pi}{12}$.
4. Запишите в виде произведения $\sin13^\circ+\sin15^\circ+\sin17^\circ$.
5. Докажите равенство $\dfrac{1}{2\sin50^\circ}+2\sin10^\circ=1$.

II вариант

1. Запишите в виде произведения:
   а) $\sin80^\circ+\sin50^\circ$; б) $\sin80^\circ-\sin50^\circ$;
   в) $\cos80^\circ+\cos50^\circ$; г) $\cos80^\circ-\cos50^\circ$.
2. Докажите равенство $\sin160^\circ-\sin100^\circ=-\cos50^\circ$.
3. Вычислите $\sin\frac{13\pi}{12}+\sin\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}$.
4. Запишите в виде произведения $\sin19^\circ+\sin17^\circ+\sin15^\circ$.
5. Докажите равенство $2\sin50^\circ-\dfrac{1}{2\sin70^\circ}=1$.

III вариант

1. Запишите в виде произведения:
   а) $\sin110^\circ+\sin50^\circ$; б) $\sin110^\circ-\sin50^\circ$;
   в) $\cos110^\circ+\cos50^\circ$; г) $\cos110^\circ-\cos50^\circ$.

2. Докажите равенство $\cos 140° + \cos 80° = -\sqrt{3}\sin 20°$.

3. Вычислите $\sin\frac{11\pi}{30} - \sin\frac{\pi}{30} - \cos\frac{8\pi}{15} - \cos\frac{2\pi}{15}$.

4. Запишите в виде произведения
$$\cos 110° + \cos 105° + \cos 100°.$$

5. Докажите равенство $\frac{\sqrt{3}}{2\sin 40°} - 2\sin 10° = 1$.

IV вариант

1. Запишите в виде произведения:
   а) $\sin 130° + \sin 10°$; б) $\sin 130° - \sin 10°$;
   в) $\cos 130° + \cos 10°$; г) $\cos 130° - \cos 10°$.

2. Докажите равенство $\cos 160° - \cos 40° = \sqrt{3}\cos 10°$.

3. Вычислите $\sin\frac{13\pi}{42} - \sin\frac{\pi}{42} + \cos\frac{10\pi}{21} - \cos\frac{4\pi}{21}$.

4. Запишите в виде произведения $\cos 105° + \cos 100° + \cos 95°$.

5. Докажите равенство $2\sin 70° - \frac{\sqrt{3}}{2\sin 80°} = 1$.

С–29* Формулы для двойных и половинных углов

I вариант

1. Вычислите:
   а) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; б) $\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Вычислите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

3. Докажите справедливость равенства $\sin 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$ для углов $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n — любое целое число.

4. Вычислите: а) $\sin 15°$; б) $\cos 22° 30'$.

5. Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{1}{8}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

II вариант

1. Вычислите:
   а) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; б) $\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)$.

2. Вычислите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}8$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

3. Докажите справедливость равенства $\cos 2\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$ для углов $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n — любое целое число.
4. Вычислите: а) $\sin 22°30'$; б) $\cos 15°$.
5. Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

III вариант

1. Вычислите:

а) $2\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$; б) $\left(\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

2. Вычислите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
3. Докажите справедливость равенства $\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$ для углов $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, где n и k — любые целые числа.
4. Вычислите: а) $\sin 75°$; б) $\cos 67°\,30'$.
5. Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{1}{18}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

IV вариант

1. Вычислите:

а) $2\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$; б) $\left(\cos\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{7\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

2. Вычислите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
3. Докажите справедливость равенства $\mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}$ для углов $\alpha \neq \pi n$, где n — любое целое число.
4. Вычислите: а) $\sin 67°30'$; б) $\cos 75°$.
5. Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{18}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

С – 30* Произведения синусов и косинусов

I вариант

1. Запишите в виде суммы или разности:
а) $\sin 33°\cos 27°$; б) $\cos 47°\cos 2°$; в) $\sin 24°\sin 6°$.
2. Вычислите:
а) $\sin 35°\cos 25° - \sin 20°\cos 10°$; б) $\cos\frac{7\pi}{36}\cos\frac{5\pi}{36} - \sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{18}$.

II вариант

1. Запишите в виде суммы или разности:
   а) $\sin 35°\cos 5°$; б) $\cos 37°\cos 23°$; в) $\sin 36°\sin 24°$.
2. Вычислите:
   а) $\sin 70°\cos 65° - \sin 25°\cos 20°$; б) $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18} - \sin\frac{7\pi}{36}\sin\frac{5\pi}{36}$.

III вариант

1. Запишите в виде суммы или разности:
   а) $\sin 34°\cos 11°$; б) $\cos 49°\cos 19°$; в) $\sin 26°\sin 54°$.
2. Вычислите:
   а) $\sin 26°\cos 34° + \sin 19°\cos 11°$; б) $\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{24} - \sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}$.

IV вариант

1. Запишите в виде суммы или разности:
   а) $\sin 32°\cos 13°$; б) $\cos 41°\cos 11°$; в) $\sin 41°\sin 16°$.
2. Вычислите:
   а) $\sin 25°\cos 5° + \sin 20°\cos 40°$; б) $\cos\frac{5\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{24}$.

С–31 Абсолютная и относительная погрешность

I вариант

1. Найдите приближение числа 0,015926 с точностью:
   а) до второго разряда после запятой с недостатком;
   б) до третьего разряда после запятой с избытком;
   в) до четвертого разряда после запятой с округлением.
2. Округлите число 0,015926 с точностью:
   а) до двух значащих цифр;
   б) до трех значащих цифр;
   в) до четырех значащих цифр.
3. Найдите абсолютную погрешность приближения:
   а) $7,26945 \approx 7,26$; б) $0,006743 \approx 0,0067$;
   в) $5,469 \cdot 10^4 \approx 5,5 \cdot 10^4$; г) $6,834 \cdot 10^{-5} \approx 6,84 \cdot 10^{-5}$.
4. Оцените относительную погрешность приближения:
   а) $6,777 \approx 6,7$; б) $6,777 \approx 6,78$;
   в) $7,96 \cdot 10^{10} \approx 7,9 \cdot 10^{10}$; г) $7,678 \cdot 10^{-9} \approx 7,68 \cdot 10^{-9}$.

II вариант

1. Найдите приближение числа 0,059268 с точностью:
   а) до второго разряда после запятой с недостатком;
   б) до третьего разряда после запятой с избытком;
   в) до четвертого разряда после запятой с округлением.

2. Округлите число 0,059268 с точностью:
   а) до двух значащих цифр;
   б) до трех значащих цифр;
   в) до четырех значащих цифр.

3. Найдите абсолютную погрешность приближения:
   а) $5{,}72694 \approx 5{,}72$; б) $0{,}003647 \approx 0{,}0036$;
   в) $4{,}683 \cdot 10^{-6} \approx 4{,}69 \cdot 10^{-6}$; г) $9{,}456 \cdot 10^{5} \approx 9{,}5 \cdot 10^{5}$.

4. Оцените относительную погрешность приближения:
   а) $7{,}666 \approx 7{,}6$; б) $7{,}666 \approx 7{,}67$;
   в) $6{,}97 \cdot 10^{10} \approx 6{,}9 \cdot 10^{10}$; г) $8{,}795 \cdot 10^{-7} \approx 8{,}80 \cdot 10^{-7}$.

III вариант

1. Найдите приближение числа 0,092698 с точностью:
   а) до второго разряда после запятой с недостатком;
   б) до третьего разряда после запятой с избытком;
   в) до четвертого разряда после запятой.
2. Округлите число 0,092698 с точностью:
   а) до двух значащих цифр;
   б) до трех значащих цифр;
   в) до четырех значащих цифр.
3. Найдите абсолютную погрешность приближения:
   а) $4{,}57869 \approx 4{,}57$; б) $0{,}004417 \approx 0{,}0044$;
   в) $6{,}954 \cdot 10^{6} \approx 7{,}0 \cdot 10^{6}$; г) $3{,}461 \cdot 10^{-7} \approx 3{,}47 \cdot 10^{-7}$.
4. Оцените относительную погрешность приближения:
   а) $4{,}888 \approx 4{,}8$; б) $9{,}888 \approx 9{,}89$;
   в) $5{,}69 \cdot 10^{10} \approx 5{,}6 \cdot 10^{10}$; г) $4{,}699 \cdot 10^{-7} \approx 4{,}70 \cdot 10^{-7}$.

IV вариант

1. Найдите приближение числа 0,026497 с точностью:
   а) до второго разряда после запятой с недостатком;
   б) до третьего разряда после запятой с избытком;
   в) до четвертого разряда после запятой.
2. Округлите число 0,026497 с точностью:
   а) до двух значащих цифр;
   б) до трех значащих цифр;
   в) до четырех значащих цифр.
3. Найдите абсолютную погрешность приближения:
   а) $9{,}45976 \approx 9{,}45$; б) $0{,}007436 \approx 0{,}0074$;
   в) $8{,}343 \cdot 10^{-8} \approx 8{,}35 \cdot 10^{-8}$; г) $4{,}965 \cdot 10^{7} \approx 5{,}0 \cdot 10^{7}$.
4. Оцените относительную погрешность приближения:
   а) $6{,}798 \approx 6{,}7$; б) $6{,}798 \approx 6{,}80$;
   в) $8{,}97 \cdot 10^{10} \approx 8{,}9 \cdot 10^{10}$; г) $8{,}598 \cdot 10^{-7} \approx 8{,}60 \cdot 10^{-7}$.

С–32* Приближения суммы, разности, произведения и частного чисел

I вариант

Оцените абсолютную погрешность приближенного равенства **(1 – 2)**:

1. а) $24{,}183 + 6{,}2392 \approx 24{,}1 + 6{,}2$;
б) $0{,}45743 - 0{,}01073 \approx 0{,}46 - 0{,}01$.

2. а) $25{,}58 + 11{,}96 + 3{,}81 + 5{,}32 \approx 25{,}5 + 11{,}9 + 3{,}8 + 5{,}3$;
б) $25{,}58 + 11{,}96 + 3{,}81 + 5{,}32 \approx 25{,}6 + 12{,}0 + 3{,}8 + 5{,}3$.

3. Оцените относительную погрешность приближенного равенства:
а) $1{,}4(7) \cdot 5{,}(17) \approx 1{,}5 \cdot 5{,}1$;
б) $6{,}(76) : 2{,}4(5) \approx 6{,}8 : 2{,}5$.

II вариант

Оцените абсолютную погрешность приближенного равенства **(1 – 2)**:

1. а) $23{,}362 + 5{,}9702 \approx 23{,}3 + 5{,}9$;
б) $0{,}53704 - 0{,}03597 \approx 0{,}54 - 0{,}04$.

2. а) $5{,}98 + 6{,}45 + 25{,}51 + 32{,}80 \approx 5{,}9 + 6{,}4 + 25{,}5 + 32{,}8$;
б) $5{,}98 + 6{,}45 + 25{,}51 + 32{,}80 \approx 6{,}0 + 6{,}5 + 25{,}5 + 32{,}8$.

3. Оцените относительную погрешность приближенного равенства:
а) $2{,}(37) \cdot 2{,}5(8) \approx 2{,}4 \cdot 2{,}6$;
б) $7{,}(62) : 1{,}(7) \approx 7{,}6 : 1{,}8$.

III вариант

Оцените абсолютную погрешность приближенного равенства **(1 – 2)**:

1. а) $31{,}091 + 8{,}9632 \approx 31{,}0 + 8{,}9$;
б) $0{,}59704 - 0{,}06283 \approx 0{,}60 - 0{,}06$.

2. а) $27{,}59 + 8{,}76 + 5{,}517 + 29{,}92 \approx 27{,}5 + 8{,}7 + 5{,}5 + 29{,}9$;
б) $27{,}59 + 8{,}76 + 5{,}517 + 29{,}92 \approx 27{,}6 + 8{,}8 + 5{,}5 + 29{,}9$.

3. Оцените относительную погрешность приближенного равенства:
а) $3{,}5(8) \cdot 4{,}(36) \approx 3{,}6 \cdot 4{,}4$;
б) $8{,}(93) : 2{,}6(12) \approx 8{,}9 : 2{,}6$.

IV вариант

Оцените абсолютную погрешность приближенного равенства (1 – 2):

1. а) $33{,}095 + 7{,}3297 \approx 33{,}0 + 7{,}3$;
   б) $0{,}49808 - 0{,}07057 \approx 0{,}50 - 0{,}07$.

2. а) $43{,}67 + 15{,}93 + 6{,}51 + 7{,}89 \approx 43{,}6 + 15{,}9 + 6{,}5 + 7{,}8$;
   б) $43{,}67 + 15{,}93 + 6{,}51 + 7{,}89 \approx 43{,}7 + 15{,}9 + 6{,}5 + 7{,}9$.

3. Оцените относительную погрешность приближенного равенства:
   а) $1{,}(36) \cdot 5{,}5(6) \approx 1{,}4 \cdot 5{,}6$;
   б) $9{,}(76) : 2{,}(83) \approx 9{,}8 : 2{,}8$.

Контрольные работы

К–1 *I вариант*

1. Решите неравенство:
   а) $3x - 5 > 4x - 2$; б) $x(x - 3) < (x - 2)(x - 1)$;
   в) $x^2 + 4x > (x + 2)^2$.

2. Решите систему неравенств:
   а) $\begin{cases} 5x + 15 > 0, \\ 2x - 5 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3 > x - 1, \\ x + 5 < 0. \end{cases}$

3. Решите неравенство:
   а) $x^2 - 6x + 5 < 0$; б) $x^2 + 2x + 2 > 0$; в) $x^2 - 8x + 16 > 0$.

4. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{1}{5}x - 3 > 3x - \frac{1}{5}$, удовлетворяющее неравенству $x^2 < 15$.

5*. Решите неравенство:
   а) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})x > \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$; б) $(10 - 2\sqrt{21})x > \sqrt{7} - \sqrt{3}$.

6*. При каком значении параметра a неравенство $ax^2 - (8 + 2a^2)x + 16a > 0$ не имеет решений?

7*. Чтобы выполнить задание в срок, токарь должен обтачивать по 25 деталей в день. Однако он обтачивал в день на 10 деталей больше и поэтому за 2 дня до срока обточил на 50 деталей больше, чем требовалось. Сколько деталей требовалось обточить по плану?

К–1 *II вариант*

1. Решите неравенство:
   а) $2x - 3 > 3x + 1$; б) $x(x + 2) > (x + 3)(x - 1)$;
   в) $x^2 - 4x > (x - 2)^2$.

2. Решите систему неравенств:
   а) $\begin{cases} 3x + 12 > 0, \\ 2x - 3 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2 > 2x - 3, \\ x - 5 > 0. \end{cases}$

3. Решите неравенство:
   а) $x^2 - 2x - 3 > 0$; б) $x^2 + 4x + 5 < 0$; в) $x^2 - 6x + 9 > 0$.

4. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{1}{3}x - 2 < 2x - \frac{1}{3}$, удовлетворяющее неравенству $x^2 < 12$.

5*. Решите неравенство:

а) $(\sqrt{2}-\sqrt{5})x < \frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$; б) $(7-2\sqrt{10})x > \sqrt{5}-\sqrt{2}$.

6*. При каком значении параметра a неравенство $ax^2 - (12+3a^2)x + 36a > 0$ не имеет решений?

7*. Чтобы выполнить задание в срок, токарь должен обтачивать по 20 деталей в день. Однако он обтачивал в день на 8 деталей больше, и поэтому за 5 дней до срока ему осталось обточить 20 деталей. Сколько деталей требовалось обточить по плану?

К–1 *III вариант*

1. Решите неравенство:
   а) $7x - 9 < 13x + 1$; б) $x(x+2) < (x+5)(x-3)$;
   в) $4x^2 - 12x < (2x-3)^2$.
2. Решите систему неравенств:
   а) $\begin{cases} 5x+12>0, \\ 3x-4<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x+5<5x+7, \\ 2x+3<0. \end{cases}$
3. Решите неравенство:
   а) $x^2 - 2x - 8 < 0$; б) $4x^2 + 12x + 10 > 0$;
   в) $x^2 + 10x + 25 > 0$.
4. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{2}{7}x - 1 > x - \frac{2}{7}$, удовлетворяющее неравенству $x^2 < 17$.

5*. Решите неравенство:

а) $(\sqrt{2}+\sqrt{7})x > \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}$; б) $(13-2\sqrt{22})x > \sqrt{11}-\sqrt{2}$.

6*. При каком значении параметра a неравенство $ax^2 - (18+2a^2)x + 36a > 0$ не имеет решений?

7*. Туристы вышли из пункта A в пункт B. Если они будут проходить по 40 км в день, то придут в пункт B в намеченный срок. А если будут проходить по 45 км в день, то за 2 дня до намеченного срока им останется пройти 40 км до пункта B. Найдите расстояние от пункта A до пункта B.

К–1 *IV вариант*

1. Решите неравенство:
   а) $6x - 7 > 12x + 2$; б) $x(x-2) < (x+2)(x-4)$;
   в) $9x^2 - 12x < (3x-2)^2$.
2. Решите систему неравенств:
   а) $\begin{cases} 7x+8>0, \\ 2x-7<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x+7<4x+8, \\ 2x+7<0. \end{cases}$

3. Решите неравенство:

а) $x^2 + 2x - 8 > 0$; б) $9x^2 + 12x + 5 < 0$;

в) $x^2 + 12x + 36 > 0$.

4. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{4}{9}x - 1 < x - \frac{4}{9}$, удовлетворяющее неравенству $x^2 < 18$.

5*. Решите неравенство:

а) $(\sqrt{3} + \sqrt{7})x < \frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$; б) $(11 - 2\sqrt{24})x > \sqrt{8} - \sqrt{3}$.

6*. При каком значении параметра a неравенство $ax^2 - (20 + 5a^2)x + 100a > 0$ не имеет решений?

7*. Туристы вышли из пункта A в пункт B. Если они будут проходить по 40 км в день, то придут в пункт B в намеченный срок. А если будут проходить по 35 км в день, то за день до намеченного срока им останется пройти 75 км до пункта B. Найдите расстояние между пунктами A и B.

К–2 *I вариант*

Решите неравенство (1–2):

1. а) $(x - 3)(x - 4)(x - 5) < 0$; б) $(x^2 + 2x)(4x - 2) \geqslant 0$.

2. а) $\frac{x-5}{x+3} > 0$; б) $\frac{3x+1}{x-2} < 1$; в) $\frac{x^2-16}{x+1} \leqslant 0$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases}(x+3)(x-2) > 0,\\(x+4)(x-3) \leqslant 0.\end{cases}$

4. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases}(x-3)(x-1) \geqslant 0,\\x > 2,\end{cases}$$

удовлетворяющие неравенству $|x| < 4$.

5*. Решите неравенство $\frac{2}{(3x-1)^2} - \frac{3}{3x-1} + 1 \leqslant 0$.

6*. Для любого числа $x \in \boldsymbol{R}$ докажите справедливость неравенства:

а) $x^2 - 16x + 69 > 0$;

б) $x^2 + 4x + 5 \geqslant 2|x + 2|$, найдите значения x, при которых левая часть неравенства равна правой;

в) $\frac{x^2+6x+6}{2} + \frac{2}{x^2+6x+10} \geqslant 0$, найдите значения x, при которых левая часть неравенства равна правой.

7*. Катер прошел 18 км по течению реки и 24 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера равна 15 км/ч.

К–2 *II вариант*

Решите неравенство (1–2):

1. а) $(x-2)(x-3)(x-4)>0$; б) $(x^2+3x)(2x-1)\leqslant 0$.

2. а) $\frac{x-4}{x+1}<0$; б) $\frac{3x-4}{x-1}>2$; в) $\frac{x^2-9}{x+2}\geqslant 0$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases}(x+1)(x-3)<0,\\(x-1)(x-2)\geqslant 0.\end{cases}$

4. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases}(x-1)(x-5)\leqslant 0,\\x>2,\end{cases}$$

удовлетворяющие неравенству $|x|\leqslant 3$.

5*. Решите неравенство $\frac{4}{(3x+1)^2}-\frac{8}{3x+1}+3\leqslant 0$.

6*. Для любого числа $x\in \boldsymbol{R}$ докажите справедливость неравенства:

а) $x^2-12x+39>0$;

б) $x^2+6x+10\geqslant 2|x+3|$, найдите значения x, при которых левая часть неравенства равна правой;

в) $\frac{x^2+4x+1}{2}+\frac{2}{x^2+4x+5}\geqslant 0$, найдите значения x, при которых левая часть неравенства равна правой.

7*. Катер прошел 9 км по течению реки и 21 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера равна 16 км/ч.

К–2 *III вариант*

Решите неравенство (1–2):

1. а) $(x+3)(x-4)(x+5)>0$; б) $(x^2-2x)(6x+3)\leqslant 0$.

2. а) $\frac{x+5}{x-3}<0$; б) $\frac{3x-1}{x+2}>1$; в) $\frac{(x-4)^2}{x+4}\leqslant 0$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases}(x+5)(2x-5)>0,\\(x+6)(3x-10)\leqslant 0.\end{cases}$

4. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases}(x+6)(x-5)\geqslant 0,\\x>0,\end{cases}$$

удовлетворяющие неравенству $|x|\leqslant 6$.

5*. Решите неравенство $\frac{8}{(2x-3)^2}-\frac{10}{2x-3}-3\leqslant 0$.

6*. Для любого числа $x \in \boldsymbol{R}$ докажите справедливость неравенства:

а) $x^2 + 5x + 7 > 0$;

б) $x^2 - 8x + 17 \geqslant 2|x - 4|$, найдите значения x, при которых левая часть неравенства равна правой;

в) $\dfrac{x^2 - 6x}{5} + \dfrac{5}{x^2 - 6x + 10} \geqslant 0$, найдите значения x, при которых левая часть неравенства равна правой.

7*. Моторная лодка прошла по течению реки 10 км, а против течения 15 км, затратив на весь путь 3 ч 20 мин. Найдите собственную скорость моторной лодки, если скорость течения равна 3 км/ч.

К–2 *IV вариант*

Решите неравенство (1–2):

1. а) $(x + 2)(x + 3)(x - 4) < 0$; б) $(x^2 - 3x)(4x + 2) \geqslant 0$.

2. а) $\dfrac{x+4}{x-1} > 0$; б) $\dfrac{3x+4}{x+1} < 2$; в) $\dfrac{(x-3)^2}{x+3} \leqslant 0$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases}(2x+1)(x-4) < 0,\\(3x-1)(x-3) \geqslant 0.\end{cases}$

4. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases}(x-6)(x+5) \leqslant 0,\\x > 0,\end{cases}$$

удовлетворяющие неравенству $|x| \leqslant 5$.

5*. Решите неравенство $\dfrac{25}{(2x+3)^2} - \dfrac{30}{2x+3} - 7 \leqslant 0$.

6*. Для любого числа $x \in \boldsymbol{R}$ докажите справедливость неравенства:

а) $x^2 + 7x + 13 > 0$;

б) $x^2 - 10x + 26 \geqslant 2|x - 5|$, найдите значения x, при которых левая часть неравенства равна правой;

в) $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{5} + \dfrac{5}{x^2 - 4x + 5} \geqslant 0$, найдите значения x, при которых левая часть неравенства равна правой.

7*. Моторная лодка прошла по течению реки 16 км, а против течения 6 км, затратив на весь путь 1 ч 30 мин. Найдите собственную скорость моторной лодки, если скорость течения равна 2 км/ч.

К–3 *I вариант*

1. Постройте график функции $y = x^3$. Является ли эта функция четной или нечетной? Принадлежат ли графику функции $y = x^3$ точки $A(-5; 125)$, $B(4; 64)$, $C(-3; -27)$?

2. Определите, между какими соседними натуральными числами заключено число $\sqrt[3]{144}$.

3. Сравните числа:

а) $\sqrt[4]{0{,}98}$ и 1; б) $\sqrt[5]{1{,}01}$ и 1; в) $\sqrt[3]{1{,}99}$ и $\sqrt[4]{0{,}99}$; г) $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[5]{4}$.

4. Вычислите:

а) $5 - \sqrt{16}$; б) $2 + \sqrt[3]{-27}$; в) $4 - \sqrt[4]{16}$; г) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$; д) $\dfrac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}}$.

5*. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{81}$; б) $\sqrt[4]{32a^4}$, если $a > 0$; в) $\sqrt[6]{128x^6}$, если $x < 0$.

6*. Решите уравнение $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}) = \sqrt{x} + 4$.

7*. Две бригады при совместной работе могут выполнить задание за 15 дней. За сколько дней могла бы выполнить это задание каждая бригада в отдельности, если первой бригаде на выполнение всего задания потребуется на 40 дней больше, чем второй?

К–3 *II вариант*

1. Постройте график функции $y = x^4$. Является ли эта функция четной или нечетной? Принадлежат ли графику функции $y = x^4$ точки $A(-3;\ 81)$, $B(-5;\ 125)$, $C(2;\ 16)$?

2. Определите, между какими соседними натуральными числами заключено число $\sqrt[3]{260}$.

3. Сравните числа:

а) $\sqrt[6]{1{,}02}$ и 1; б) $\sqrt[7]{0{,}97}$ и 1; в) $\sqrt[3]{0{,}98}$ и $\sqrt[4]{1{,}98}$; г) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{5}$.

4. Вычислите:

а) $3 - \sqrt{25}$; б) $5 + \sqrt[3]{-8}$; в) $3 - \sqrt[4]{81}$; г) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; д) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$.

5*. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{54}$; б) $\sqrt[4]{48a^4}$, если $a < 0$; в) $\sqrt[6]{192x^6}$, если $x > 0$.

6*. Решите уравнение

$$(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}) = 8 - \sqrt{x}.$$

7*. При совместной работе двух труб можно наполнить бассейн за 18 мин. За сколько минут можно наполнить бассейн через каждую трубу в отдельности, если через первую трубу можно наполнить бассейн на 15 мин быстрее, чем через вторую?

К–3 *III вариант*

1. Постройте график функции $y = x^5$. Является ли эта функция четной или нечетной? Принадлежат ли графику функции $y = x^5$ точки $A(-3; -243)$, $B(2; 32)$, $C(-2; 32)$?
2. Определите, между какими соседними натуральными числами заключено число $\sqrt[3]{501}$.
3. Сравните числа:

   а) $\sqrt[5]{0{,}999}$ и 1; б) $\sqrt[6]{1{,}002}$ и 1;

   в) $\sqrt[3]{0{,}997}$ и $\sqrt[4]{1{,}001}$; г) $\sqrt[6]{4}$ и $\sqrt[5]{3}$.
4. Вычислите:

   а) $7 - \sqrt{81}$; б) $4 + \sqrt[3]{-64}$; в) $9 - \sqrt[4]{625}$; г) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{64}$; д) $\dfrac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{4}}$.

5*. Вынесите множитель из-под знака корня:

   а) $\sqrt[3]{250}$; б) $\sqrt[4]{80a^4}$, если $a > 0$; в) $\sqrt[6]{256x^6}$, если $x < 0$.

6*. Решите уравнение $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{9}) = \sqrt{x} + 9$.

7*. Две бригады при совместной работе могут выполнить задание за 16 дней. За сколько дней могла бы выполнить это задание каждая бригада в отдельности, если первой бригаде на выполнение всего задания потребуется на 24 дня больше, чем второй?

К–3 *IV вариант*

1. Постройте график функции $y = x^6$. Является ли эта функция четной или нечетной? Принадлежат ли графику функции $y = x^6$ точки $A(-2; -64)$, $B(-3; 729)$, $C(2; 64)$?
2. Определите, между какими соседними натуральными числами заключено число $\sqrt[3]{514}$.
3. Сравните числа:

   а) $\sqrt[7]{1{,}003}$ и 1; б) $\sqrt[8]{0{,}998}$ и 1;

   в) $\sqrt[3]{0{,}996}$ и $\sqrt[4]{1{,}04}$; г) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[4]{6}$.
4. Вычислите:

   а) $6 - \sqrt{64}$; б) $5 + \sqrt[3]{-125}$; в) $8 - \sqrt[4]{256}$;

   г) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$; д) $\dfrac{\sqrt[4]{3125}}{\sqrt[4]{5}}$.

5*. Вынесите множитель из-под знака корня:

   а) $\sqrt[3]{243}$; б) $\sqrt[4]{160a^4}$, если $a < 0$; в) $\sqrt[6]{320x^6}$, если $x > 0$.

6*. Решите уравнение $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9})=15-\sqrt{x}$.

7*. При совместной работе двух труб можно наполнить бассейн за 24 мин. За сколько минут можно наполнить бассейн через каждую трубу в отдельности, если через первую трубу можно наполнить бассейн на 20 мин быстрее, чем через вторую?

К–4 *I вариант*

1. Дана арифметическая прогрессия $-7; -5; \dots$.
   а) Найдите ее тринадцатый член.
   б) Найдите сумму ее первых шестнадцати членов.
2. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ задана формулой n-го члена $a_n = 7 + 3n$. Найдите сумму ее первых двадцати членов.
3. Является ли число 28,4 членом арифметической прогрессии, первый член которой равен 3,2, а пятый равен 4,8? Если да, то определите номер этого члена.
4. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 4 и не превосходящих 120.

5*. Найдите сумму третьего и тринадцатого членов арифметической прогрессии, если ее восьмой член равен 25.

6*. Сколько первых членов арифметической прогрессии $-6; -5; \dots$ нужно сложить, чтобы получить в сумме -15?

7*. Две трубы при совместной работе наполняют бассейн за 18 мин. В другой раз первая труба наполняла бассейн 20 мин, а вторая труба —15 мин, и они наполнили весь бассейн. За сколько минут можно наполнить бассейн через каждую трубу в отдельности?

К–4 *II вариант*

1. Дана арифметическая прогрессия $-6; -3; \dots$.
   а) Найдите ее четырнадцатый член.
   б) Найдите сумму ее первых семнадцати членов.
2. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ задана формулой n-го члена $a_n = 9 + 2n$. Найдите сумму ее первых двадцати пяти членов.
3. Является ли число 21,4 членом арифметической прогрессии, первый член которой равен 2,8, а шестой равен 4,3? Если да, то определите номер этого члена.
4. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 6 и не превосходящих 150.

5*. Найдите сумму четвертого и четырнадцатого членов арифметической прогрессии, если ее девятый член равен 24.

6*. Сколько первых членов арифметической прогрессии −7; −6; ... нужно сложить, чтобы получить в сумме −25?

7*. Две бригады при совместной работе выполнили задание за 24 дня. Если бы первая бригада проработала над выполнением задания 10 дней, а вторая — 45 дней, то они выполнили бы все задание. За сколько дней могла бы выполнить это задание каждая бригада в отдельности?

К–4 *III вариант*

1. Дана арифметическая прогрессия −3,5; −3,2; ... .
   а) Найдите ее шестнадцатый член.
   б) Найдите сумму ее первых одиннадцати членов.
2. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ задана формулой n-го члена $a_n = 7 - 3n$. Найдите сумму ее первых двадцати членов.
3. Является ли число 122,2 членом арифметической прогрессии, первый член которой равен −3,2, а пятый равен 4,4? Если да, то определите номер этого члена.
4. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 7 и не превосходящих 133.

5*. Найдите сумму третьего и семнадцатого членов арифметической прогрессии, если ее десятый член равен 26.

6*. Сколько первых членов арифметической прогрессии −6,5; −6; ... нужно сложить, чтобы получить в сумме −42,5?

7*. Две трубы при совместной работе наполнили бассейн за 24 мин. В другой раз первая труба наполняла бассейн 21 мин, а вторая труба — 28 мин, и они наполнили весь бассейн. За сколько минут можно наполнить бассейн через каждую трубу в отдельности?

К–4 *IV вариант*

1. Дана арифметическая прогрессия −4,2; −3,5; ... .
   а) Найдите ее пятнадцатый член.
   б) Найдите сумму ее первых двенадцати членов.
2. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ задана формулой n-го члена $a_n = 9 - 2n$. Найдите сумму ее первых двадцати пяти членов.
3. Является ли число 88,2 членом арифметической прогрессии, первый член которой равен −2,8, а шестой равен 4,2? Если да, то определите номер этого члена.

4. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 8 и не превосходящих 192.
5*. Найдите сумму четвертого и восемнадцатого членов арифметической прогрессии, если ее одиннадцатый член равен 27.
6*. Сколько первых членов арифметической прогрессии −5,5; −5; ... нужно сложить, чтобы получить в сумме −31,5?
7*. Две бригады при совместной работе выполнили задание за 24 дня. Если бы первая бригада проработала над выполнением задания 30 дней, а вторая — 15 дней, то они выполнили бы все задание. За сколько дней могла бы выполнить это задание каждая бригада в отдельности?

К–5 *I вариант*

1. Дана геометрическая прогрессия, первый член которой равен −32, а знаменатель равен $\frac{1}{2}$.
   а) Найдите ее шестой член.
   б) Найдите сумму ее первых семи членов.
2. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ с положительными членами $a_3 = 7$, $a_5 = 28$. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.
3. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ $a_9 = 15$, $a_{11} = 135$. Найдите a_{10}.
4. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ $a_4 = 12$. Найдите $a_2 \cdot a_6$.
5*. Знаменатель геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равен $\frac{1}{2}$. Найдите $\frac{b_5 \cdot b_7}{b_6 \cdot b_8}$.
6*. Вычислите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии 36; −18; ... .
7*. Путь от села к городу идет сначала горизонтально, а затем в гору. Велосипедист едет на горизонтальном участке со скоростью 10 км/ч, в гору со скоростью 6 км/ч, с горы — 12 км/ч. Вычислите расстояние от села до города, если на путь в одном направлении велосипедист тратит 4 ч, а в обратном направлении — 3 ч.

К–5 *II вариант*

1. Дана геометрическая прогрессия, первый член которой равен −27, а знаменатель равен $\frac{1}{3}$.
   а) Найдите ее шестой член.
   б) Найдите сумму ее первых пяти членов.

2. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ с положительными членами $a_2 = 8$, $a_4 = 72$. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.
3. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ $a_{10} = 27$, $a_{12} = 108$. Найдите a_{11}.
4. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ $a_5 = 11$. Найдите $a_3 \cdot a_7$.

5*. Знаменатель геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равен $\frac{1}{3}$. Найдите $\frac{b_6 \cdot b_8}{b_7 \cdot b_9}$.

6*. Вычислите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии 45; −15; ... .

7*. Путь от села к городу идет сначала горизонтально, а затем в гору. Велосипедист едет на горизонтальном участке со скоростью 12 км/ч, в гору со скоростью 7 км/ч, с горы — 14 км/ч. Вычислите расстояние от села до города, если на путь в одном направлении велосипедист тратит 3 ч, а в обратном направлении — 2 ч.

К–5 *III вариант*

1. Дана геометрическая прогрессия, первый член которой равен −32, а знаменатель равен $-\frac{1}{2}$.
   а) Найдите ее шестой член.
   б) Найдите сумму ее первых семи членов.
2. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ с положительными членами $a_3 = 5$, $a_5 = 45$. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.
3. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ $a_{14} = 24$, $a_{16} = 54$. Найдите a_{15}.
4. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ $a_6 = -13$. Найдите $a_4 \cdot a_8$.

5*. Знаменатель геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равен $-\frac{1}{2}$. Найдите $\frac{b_7 \cdot b_9}{b_8 \cdot b_{10}}$.

6*. Вычислите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии 42; −8,4; ... .

7*. Путь от села к городу идет сначала горизонтально, а затем в гору. Велосипедист едет на горизонтальном участке со скоростью 10 км/ч, в гору со скоростью 6 км/ч, с горы — 12 км/ч. Вычислите расстояние от села до города, если на путь в одном направлении велосипедист тратит 5 ч, а в обратном направлении — 3,5 ч.

К-5 *IV вариант*

1. Дана геометрическая прогрессия, первый член которой равен -27, а знаменатель равен $-\frac{1}{3}$.

   а) Найдите ее шестой член.

   б) Найдите сумму ее первых пяти членов.

2. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ с положительными членами $a_2 = 5$, $a_4 = 20$. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.
3. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ $a_{13} = 18$, $a_{15} = 72$. Найдите a_{14}.
4. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ $a_7 = -14$. Найдите $a_5 \cdot a_9$.

5*. Знаменатель геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равен $-\frac{1}{3}$. Найдите $\frac{b_8 \cdot b_{10}}{b_9 \cdot b_{11}}$.

6*. Вычислите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $50; -12,5; \ldots$.

7*. Путь от села к городу идет сначала горизонтально, а затем в гору. Велосипедист едет на горизонтальном участке со скоростью 8 км/ч, в гору со скоростью 5 км/ч, с горы — 10 км/ч. Вычислите расстояние от села до города, если на путь в одном направлении велосипедист тратит 5 ч, а в обратном направлении — 3,5 ч.

К-6 *I вариант*

1. Вычислите $2\sin\frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.
2. Упростите выражение:

   а) $\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$ для всех $\alpha \neq \pi k$, где k — любое целое число;

   б) $\sin(2\pi + \alpha) + \cos(\pi + \alpha) + \sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)$.

3. Докажите равенство $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha} - \sin\alpha = 1$ для всех $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k — любое целое число.
4. Вычислите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

5*. Докажите, что для любого α справедливо неравенство

$$-1 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha \leqslant 1.$$

6*. Найдите значение выражения $\frac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

7*. В пансионате в прошлом году отдыхали 1200 мужчин и женщин. В этом году число мужчин уменьшилось на 10 %, а число женщин увеличилось на 20 %. В результате общее число отдыхающих увеличилось на 75 человек. Сколько мужчин и сколько женщин отдыхало в пансионате в этом году?

К–6 *II вариант*

1. Вычислите $2\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$ для всех $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число;

б) $\sin(\pi + \alpha) + \cos(2\pi + \alpha) - \sin(-\alpha) - \cos(-\alpha)$.

3. Докажите равенство $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} - \cos\alpha = 1$ для всех $\alpha \neq 2\pi k$, где k — любое целое число.

4. Вычислите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

5*. Докажите, что для любого α справедливо неравенство

$$-1 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha \leqslant 1.$$

6*. Найдите значение выражения $\frac{3\sin\alpha - 4\cos\alpha}{4\sin\alpha + 5\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

7*. До выборов в городской думе заседали 50 депутатов от двух партий. После выборов число депутатов первой партии увеличилось на 20 %, число депутатов второй партии уменьшилось на 30 %, общее число депутатов от этих двух партий уменьшилось на 5 человек. Сколько депутатов от каждой из этих партий избрано в городскую думу?

К–6 *III вариант*

1. Вычислите $2\cos\frac{3\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} + \sin^2\alpha$ для всех $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число;

б) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) - \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + \sin(-\alpha) - \cos(-\alpha)$.

3. Докажите равенство $\frac{1}{1-\sin\alpha}+\frac{1}{1+\sin\alpha}-2 = 2\text{tg}^2\alpha$ для всех $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число.

4. Вычислите $\sin\alpha$, если $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

5*. Докажите, что для любого α справедливо неравенство

$$-1 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha \leqslant 1.$$

6*. Найдите значение выражения $\frac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{5\sin\alpha - 3\cos\alpha}$, если $\text{tg}\,\alpha = 2$.

7*. В прошлом году выпускники города N получили 120 золотых и серебряных медалей. В этом году число золотых медалей увеличилось на 20 %, а число серебряных медалей уменьшилось на 20 %. В результате общее число медалей уменьшилось на 10. Сколько золотых и сколько серебряных медалей получили выпускники города N в этом году?

К–6 *IV вариант*

1. Вычислите $2\sin\frac{5\pi}{4} + \text{ctg}\,\frac{\pi}{6}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{\text{ctg}^2\alpha+1} + \cos^2\alpha$ для всех $\alpha \neq \pi k$, где k — любое целое число;

б) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)$.

3. Докажите равенство $\frac{1}{1-\cos\alpha}+\frac{1}{1+\cos\alpha}-2 = 2\text{ctg}^2\alpha$ для всех $\alpha \neq \pi k$, где k — любое целое число.

4. Вычислите $\cos\alpha$, если $\text{ctg}\,\alpha = -\sqrt{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

5*. Докажите, что для любого α справедливо неравенство

$$-1 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha \leqslant 1.$$

6*. Найдите значение выражения $\frac{4\sin\alpha + 5\cos\alpha}{3\sin\alpha - 4\cos\alpha}$, если $\text{tg}\,\alpha = 4$.

7*. В прошлом году в двух библиотеках было 160 тыс. книг. В этом году число книг увеличилось в первой библиотеке на 20 %, а во второй библиотеке на 10 %. В результате общее число книг увеличилось на 21 тыс. Сколько книг стало в каждой библиотеке?

Итоговый тест для самоконтроля

I вариант

Обязательная часть[1]

1. Товар при распродаже уценили на 20 %, при этом он стал стоить 680 р. Сколько стоил товар до распродажи?

   А. 136 р. **Б.** 816 р. **В.** 700 р. **Г.** 850 р.

2. Найдите значение выражения $\frac{a+x}{a-x}$ при $a = -0{,}7$ и $x = -0{,}3$.

   Ответ. ____________

3. Из формулы $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ выразите переменную b.

   А. $b = \frac{ac}{a+c}$ **Б.** $b = \frac{ac}{c-a}$ **В.** $b = \frac{a-c}{ac}$ **Г.** $b = \frac{ac}{a-c}$

4. Упростите выражение $(c + 2)(c - 3) - (c - 1)^2$.

   А. $c - 7$ **Б.** $c - 5$ **В.** $c + 5$ **Г.** $-3c - 7$

5. Укажите выражение, равное степени 2^{k-3}.

   А. $2^k - 2^3$ **Б.** $\frac{2^k}{2^3}$ **В.** $\frac{2^k}{2^{-3}}$ **Г.** $(2^k)^{-3}$

6. Решите уравнение $\frac{1}{3}x^2 - 12 = 0$.

   А. 2; −2 **Б.** 2 **В.** 6; −6 **Г.** 6

7. В 2 большие коробки и 3 маленькие коробки помещается 38 карандашей, а в 3 большие коробки и 2 маленькие коробки — 42 карандаша. Сколько карандашей в большой и маленькой коробках вместе?

   Ответ. ____________

8. Используя графики функций $y = x^3$ и $y = 2x + 4$ (рис. 82), решите уравнение $x^3 - 2x - 4 = 0$.

   Ответ. ____________

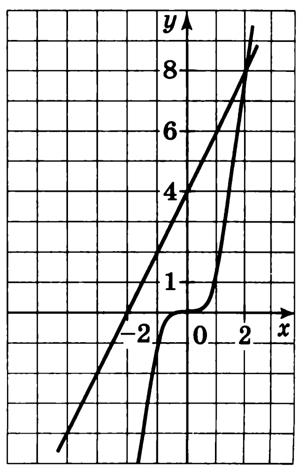

Рис. 82

---

[1]Использованы задания из кн.: Алгебра: сб. заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе / Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др. — М.: Просвещение, 2006.

9. Из чисел –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 выберите все те, при которых значение выражения $10x + 1$ больше значения выражения $8x - 2$.

А. –3; –2   Б. –3; –2; –1
В. 0; 1; 2; 3   Г. –1; 0; 1; 2; 3

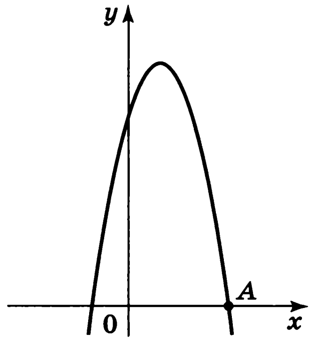

Рис. 83

10. Известно, что $a > b$. Сравните $a - b$ и $b - a$.

А. $a - b > b - a$ Б. $a - b < b - a$
В. $a - b = b - a$ Г. Данных для сравнения недостаточно

11. Последовательность задана формулой $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Какое из чисел не является членом этой последовательности?

А. $\frac{1}{2}$ Б. $\frac{1}{4}$ В. $\frac{1}{5}$ Г. $\frac{1}{6}$

12. На рисунке 83 изображен график функции $y = -2x^2 + 4x + 6$. Вычислите координаты точки A.

Ответ. ______________________

Дополнительная часть

13. Решите неравенство $(-\sqrt{x} - x)(x - 6\sqrt{x} + 8) \geqslant 0$.

Ответ. ______________________

14. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из двух сел A и B, расстояние между которыми 6 км. Пешеход, шедший из села A, пришел в село B через 54 мин после встречи, а пешеход, шедший из села B, пришел в село A через 24 мин после встречи. Найдите расстояние от места встречи до ближайшего из этих сел.

Ответ. ______________________

II вариант

Обязательная часть

1. Цену на товар повысили на 30 %, при этом он стал стоить 780 р. Сколько стоил товар до подорожания?

А. 234 р.   Б. 2600 р.   В. 1014 р.   Г. 600 р.

2. Найдите значение выражения $\frac{a - x}{a + x}$ при $a = -0{,}4$ и $x = -0{,}5$.

Ответ. ______________________

3. Из формулы $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ выразите переменную a.

А. $a = \frac{bc}{b+c}$ **Б.** $a = \frac{bc}{c-b}$ **В.** $a = \frac{b+c}{bc}$ **Г.** $a = \frac{bc}{b-c}$

4. Упростите выражение $(a - 1)^2 - (a + 1)(a - 2)$.

А. $-3a - 1$ **Б.** $3 - a$ **В.** $3a + 1$ **Г.** $a + 1$

5. Укажите выражение, равное степени 2^{5-k}.

А. $2^5 - 2^k$ **Б.** $\frac{2^5}{2^k}$ **В.** $\frac{2^5}{2^{-k}}$ **Г.** $2^5 - k$

6. Решите уравнение $\frac{1}{4}x^2 - 16 = 0$.

А. 2; −2 **Б.** 2 **В.** 8; −8 **Г.** 8

7. Букет из трех тюльпанов и двух нарциссов стоит 80 р., а букет из двух тюльпанов и трех нарциссов — 70 р. Сколько стоит один тюльпан и один нарцисс вместе?

Ответ. ____________________

8. Используя графики функций $y = x^3$ и $y = -x + 2$ (рис. 84), решите уравнение $x^3 + x - 2 = 0$.

Ответ. ____________________

9. Из чисел −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 выберите все те, при которых значение выражения $3x - 1$ меньше значения выражения $7x + 1$.

А. −3; −2 **Б.** −3; −2; −1
В. 0; 1; 2; 3 **Г.** −1; 0; 1; 2; 3

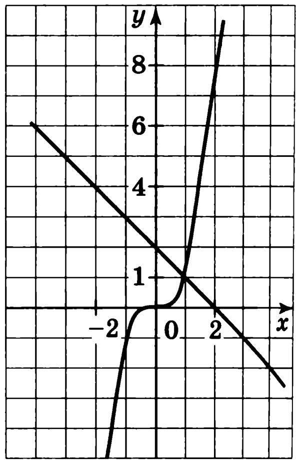

Рис. 84

10. Известно, что $a < b$. Сравните $a - b$ и $b - a$.

А. $a - b > b - a$ **Б.** $a - b < b - a$
В. $a - b = b - a$ **Г.** Данных для сравнения недостаточно

11. Последовательность задана формулой $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Какое из чисел не является членом этой последовательности?

А. −1 **Б.** $-\frac{1}{3}$ **В.** $-\frac{1}{5}$ **Г.** $-\frac{1}{6}$

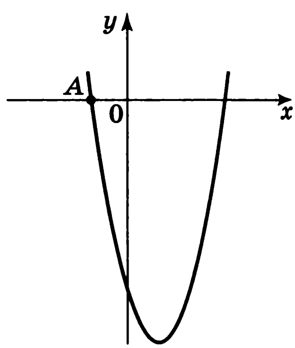

Рис. 85

12. На рисунке 85 изображен график функции $y = 2x^2 - 4x - 6$. Вычислите координаты точки A.

Ответ. ____________________________

Дополнительная часть

13. Решите неравенство $(\sqrt{x} + x)(x - 5\sqrt{x} + 6) \leqslant 0$.

Ответ. ____________________________

14. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из двух сел A и B, расстояние между которыми 15 км. Пешеход, шедший из села A, пришел в село B через 45 мин после встречи, а пешеход, шедший из села B, пришел в село A через 20 мин после встречи. Найдите расстояние от места встречи до ближайшего из этих сел.

Ответ. ____________________________

Ответы к контрольным работам

К–1. I вариант. 1. а) $(-\infty; -3)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) нет решений. **2.** а) $(-3; 2{,}5)$; б) нет решений. **3.** а) $(1; 5)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(-\infty; 4)\cup(4; +\infty)$. **4.** -3. **5.** а) $(-\infty; -2)$; б) $\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}; +\infty\right)$. **6.** При $a = -2$. **7.** 300 деталей.

II вариант. 1. а) $(-\infty; -4)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) нет решений. **2.** а) $(-4; 1{,}5)$; б) $(5; +\infty)$. **3.** а) $(-\infty; -1)\cup(3; +\infty)$; б) нет решений; в) $(-\infty; 3)\cup$ $\cup(3; +\infty)$. **4.** 3. **5.** а) $(-\infty; -1)$; б) $\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}; +\infty\right)$. **6.** При $a = -2$. **7.** 300 деталей.

III вариант. 1. а) $\left(-\frac{5}{3}; +\infty\right)$; б) нет решений; в) $\boldsymbol{R}$. **2.** а) $\left(-2{,}4; \frac{4}{3}\right)$; б) $(-\infty; -1{,}5)$. **3.** а) $(-2; 4)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(-\infty; -5)\cup(-5; +\infty)$. **4.** -4. **5.** а) $(-1; +\infty)$; б) $\left(\frac{\sqrt{11}+\sqrt{2}}{9}; +\infty\right)$ **6.** При $a = -3$. **7.** 400 км.

IV вариант. 1. а) $(-\infty; -1{,}5)$; б) нет решений; в) $\boldsymbol{R}$. **2.** а) $\left(-\frac{8}{7}; 3{,}5\right)$; б) $(-\infty; -3{,}5)$. **3.** а) $(-\infty; -4)\cup(2; +\infty)$; б) нет решений; в) $(-\infty; -6)\cup$ $\cup(-6; +\infty)$. **4.** 4. **5.** а) $(-\infty; -1)$; б) $\left(\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}}{5}; +\infty\right)$. **6.** При $a = -2$. **7.** 320 км.

К–2. I вариант. 1. а) $(-\infty; 3) \cup (4; 5)$; б) $[-2; 0] \cup [0{,}5; +\infty)$. **2.** а) $(-\infty; -3)\cup(5; +\infty)$; б) $(-1{,}5; 2)$; в) $(-\infty; -4]\cup(-1; 4]$. **3.** $[-4; -3)\cup(2; 3]$. **4.** $[3; 4)$. **5.** $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$. **6.** б) -1; -3; в) -2; -4. **7.** 3 км/ч.

II вариант. 1. а) $(2; 3)\cup(4; +\infty)$; б) $(-\infty; -3]\cup[0; 0{,}5]$. **2.** а) $(-1; 4)$; б) $(-\infty; 1)\cup(2; +\infty)$; в) $[-3; -2)\cup[3; +\infty)$. **3.** $(-1; 1]\cup[2; 3)$. **4.** $(2; 3]$. **5.** $\left[-\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right]$. **6.** б) -2; -4; в) -1; -3. **7.** 2 км/ч.

III вариант. 1. а) $(-5; -3)\cup(4; +\infty)$; б) $(-\infty; -0{,}5]\cup[0; 2]$. **2.** а) $(-5; 3)$; б) $(-\infty; -2)\cup(1{,}5; +\infty)$; в) $(-\infty; -4)\cup\{4\}$. **3.** $[-6; -5)\cup\left(2{,}5; 3\frac{1}{3}\right]$. **4.** $[5; 6]$. **5.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{11}{6}; +\infty\right)$. **6.** б) 3; 5; в) 1; 5. **7.** 9 км/ч.

IV вариант. 1. а) $(-\infty; -3) \cup (-2; 4)$; б) $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]\cup[3; +\infty)$. **2.** а) $(-\infty; -4)\cup(1; +\infty)$; б) $(-2; -1)$; в) $(-\infty; -3)\cup\{3\}$. **3.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right] \cup$ $\cup[3; 4)$. **4.** $(0; 5]$. **5.** $(-\infty; -4]\cup\left[-\frac{8}{7}; +\infty\right)$. **6.** б) 4; 6; в) 0; 4. **7.** 14 км/ч.

К–3. I вариант. 1. Функция $y = x^3$ является нечетной, точки B и C принадлежат графику этой функции. **2.** $5 < \sqrt[3]{144} < 6$. **3.** а) $\sqrt[4]{0,98} < 1$; б) $\sqrt[5]{1,01} > 1$; в) $\sqrt[3]{1,99} > \sqrt[4]{0,99}$; г) $\sqrt[4]{3} < \sqrt[5]{4}$. **4.** а) 1; б) −1; в) 2; г) 3; д) 3. **5.** а) $3\sqrt[3]{3}$; б) $2a\sqrt[4]{2}$; в) $-2x\sqrt[6]{2}$. **6.** 9. **7.** 60 и 20 дней.
II вариант. 1. Функция $y = x^4$ является четной, точки A и C принадлежат графику этой функции. **2.** $6 < \sqrt[3]{260} < 7$. **3.** а) $\sqrt[6]{1,02} > 1$; б) $\sqrt[7]{0,97} < 1$; в) $\sqrt[3]{0,98} < \sqrt[4]{1,98}$; г) $\sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5}$. **4.** а) −2; б) 3; в) 0; г) 2; д) 3. **5.** а) $3\sqrt[3]{2}$; б) $-2a\sqrt[4]{3}$; в) $2x\sqrt[6]{3}$. **6.** 4. **7.** 30 и 45 мин.
III вариант. 1. Функция $y = x^5$ является нечетной, точки A и B принадлежат графику этой функции. **2.** $7 < \sqrt[3]{501} < 8$. **3.** а) $\sqrt[5]{0,999} < 1$; б) $\sqrt[6]{1,002} > 1$; в) $\sqrt[3]{0,997} < \sqrt[4]{1,001}$; г) $\sqrt[6]{4} > \sqrt[5]{3}$. **4.** а) −2; б) 0; в) 4; г) 2; д) 4. **5.** а) $5\sqrt[3]{2}$; б) $2a\sqrt[4]{5}$; в) $-2x\sqrt[6]{4}$. **6.** 16. **7.** 48 и 24 дня.
IV вариант. 1. Функция $y = x^6$ является четной, точки B и C принадлежат графику этой функции. **2.** $8 < \sqrt[3]{514} < 9$. **3.** а) $\sqrt[7]{1,003} > 1$; б) $\sqrt[8]{0,998} < 1$; в) $\sqrt[3]{0,996} < \sqrt[4]{1,04}$; г) $\sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{6}$. **4.** а) −2; б) 0; в) 4; г) 4; д) 5. **5.** а) $3\sqrt[3]{9}$; б) $-2a\sqrt[4]{10}$; в) $2x\sqrt[6]{5}$. **6.** 9. **7.** 40 и 60 мин.

К–4. I вариант. 1. а) 17; б) 128. **2.** 770. **3.** Да; 64. **4.** 1860. **5.** 50. **6.** 3 или 10. **7.** 30 и 45 мин.
II вариант. 1. а) 33; б) 306. **2.** 875. **3.** Да; 63. **4.** 1950. **5.** 48. **6.** 5 или 10. **7.** 40 и 60 дней.
III вариант. 1. а) 1; б) −22. **2.** −490. **3.** Да; 67. **4.** 1330. **5.** 52. **6.** 10 или 17. **7.** 42 и 56 мин.
IV вариант. 1. а) 5,6; б) −4,2. **2.** −425. **3.** Да; 66. **4.** 2400. **5.** 54. **6.** 9 или 14. **7.** 40 и 60 дней.

К–5. I вариант. 1. а) −1; б) −63,5. **2.** $110\frac{1}{4}$. **3.** −45 или 45. **4.** 144. **5.** 4. **6.** 24. **7.** 32 км.
II вариант. 1. а) $-\frac{1}{9}$; б) $-40\frac{1}{3}$. **2.** $322\frac{2}{3}$. **3.** −54 или 54. **4.** 121. **5.** 9. **6.** $33\frac{3}{4}$. **7.** 26 км.
III вариант. 1. а) 1; б) $-21\frac{1}{2}$. **2.** $67\frac{2}{9}$. **3.** −36 или 36. **4.** 169. **5.** 4. **6.** 35. **7.** 38 км.
IV вариант. 1. а) $\frac{1}{9}$; б) $-20\frac{1}{3}$. **2.** 157,5. **3.** −36 или 36. **4.** 196. **5.** 9. **6.** 40. **7.** 31 км.

К–6. I вариант. 1. $\sqrt{3} + 1$. **2.** а) $\sin\alpha$; б) 0. **4.** $-\sqrt{3}$. **6.** $\frac{3}{13}$. **7.** 495 мужчин и 780 женщин.

II вариант. 1. $\sqrt{3} - 1$. **2.** а) $\cos\alpha$; б) 0. **4.** $\sqrt{3}$. **6.** $\frac{11}{25}$. **7.** 24 депутата от первой партии и 21 депутат от второй партии.

III вариант. 1. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. **2.** а) 1; б) 0. **4.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** $\frac{10}{7}$. **7.** 42 золотые и 68 серебряных медалей.

IV вариант. 1. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. **2.** а) 1; б) 0. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** $\frac{21}{8}$. **7.** 60 тыс. книг в первой библиотеке и 121 тыс. книг во второй.

Ответы к итоговому тесту

I вариант. *Обязательная часть.* **1.** Г. **2.** 2,5. **3.** Г. **4.** А. **5.** Б. **6.** В. **7.** 16. **8.** 2. **9.** Г. **10.** А. **11.** В. **12.** (3; 0).
Дополнительная часть. **13.** $\{0\} \cup [4; 16]$. **14.** 2,4 км.

II вариант. *Обязательная часть.* **1.** Г. **2.** $-\frac{1}{9}$. **3.** А. **4.** Б. **5.** Б. **6.** В. **7.** 30 р. **8.** 1. **9.** В. **10.** Б. **11.** Г. **12.** (−1; 0).
Дополнительная часть. **13.** $\{0\} \cup [4; 9]$. **14.** 6 км.

Оглавление

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Потапов Михаил Константинович
Шевкин Александр Владимирович

АЛГЕБРА

Дидактические материалы

9 класс

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Г. Войлокова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художник *О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *О. Ю. Тупикиной*
Техническое редактирование и компьютерная верстка *И. Ю. Соколовой*
Корректоры *Н. И. Новикова, А. В. Рудакова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 19.02.10. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 6,7. Тираж 10 000 экз. Заказ № 30038.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬ

СВЕДЕНИЯ О СЕРТИФИКАТЕ Э

Сертификат 135955613336665976574499022560335136778

Владелец Сурнин Руслан Валерьевич

Действителен С 19.06.2023 по 18.06.2024